

## חדוֹה 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

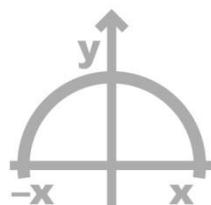


A square divided into four triangles by its diagonals. The top-left triangle has side lengths labeled 1, 1, and  $\sqrt{2}$ .



A white coordinate system on a light green background with a point at the origin labeled 0. Arrows indicate directions along the axes.


$$\{\sqrt{x}\}^2$$



## תוכן העניינים

1.	1. אינטגרלים מיידיים .....
6.	2. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים" .....
8.	3. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלוקת .....
12.	4. אינטגרלים בשיטת ההצבה .....
15.	5. אינטגרלים של פונקציות רצינוליות .....
17.	6. אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות .....
28.	7. שימושי האינטגרל המסוים (שטח-אורך קשת) .....
49.	8. שימושי האינטגרל המסוים (נפח-שטח מעטפת) .....
52.	9. המשפט היסודי של החדו"א, משפט הערך הממוצע לאינטגרלים .....
60.	10. אינטגרלים לא אמיתיים .....
71.	11. טורים עם איברים קבועים .....
85.	12. סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטוריו חזקות .....
92.	13. טורי טילור - מקלורן .....
107.	14. משוואות מסדר ראשון .....
121.	15. משוואות ליניאריות מסדר שני .....
136.	16. משוואות ליניאריות מסדר ת .....
145.	17. מערכת משוואות ליניאריות .....
152.	18. שימושים של משוואות דיפרנציאליות .....
160.	19. בעיות שטורים ליביל .....
165.	20. נגזרות חלקיות דיפרנציאబליות .....
176.	21. נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה .....
181.	22. נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה .....
192.	23. אינטגרלים משולשים ו שימושיהם .....

## תוכן העניינים

24. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות ו כדוריות.....	195
25. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן) .....	199
26. אינטגרלים משטחיים ושימושיהם.....	200
27. האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו .....	203

# חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 1 - אינטגרלים מיידיים

### תוכן העניינים

1 .....	1. אינטגרלים מיידיים .....
4 .....	2. מציאת פונקציה קדומה .....

## אינטגרלים מיידיים

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתרונות על ידי הכלל :  $(\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c)$ )

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int x^4 dx \quad (2)$$

$$\int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int \left( \frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20 :

(פתרונות על ידי הכלל :  $(\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c)$ )

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14)$$

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26 :

(פתרונות על ידי הכלל :  $(\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c)$ )

$$\int \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 29-27 :

$$\left( \int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c \right) \text{ (פתרה על ידי הכלל)}$$

$$\int \left( 4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$(30) \text{ חשבו את האינטגרל : } \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$$

$$\left( \int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c \right) \text{ (פתרה על ידי הכלל)}$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 33-31 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

## תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x} + c \quad (3)$$

$$\frac{x^5}{5} + c \quad (2)$$

$$4x + c \quad (1)$$

$$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8)$$

$$\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11)$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$

$$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15)$$

$$\frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14)$$

$$\frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$

$$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17)$$

$$\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$

$$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$

$$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21)$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$

$$x + \ln|x+2| + c \quad (25)$$

$$\frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24)$$

$$x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$

$$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28)$$

$$\frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27)$$

$$4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{\left(200\right)^x}{\ln(200)} + c \quad (30)$$

$$8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{\frac{-4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$

$$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33)$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32)$$

$$\frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

## מציאת פונקציה קדומה

### שאלות

1) נתונה הנגזרת הבאה :  $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$ .

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה  $(2, 3)$ .  
מצאו את הפונקציה.

2) נתונה הנגזרת הבאה :  $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$ .

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-  $x$  בנקודה שבה  $x=4$ .  
מצאו את הפונקציה.

3) נתונה הנגזרת הבאה :  $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$ .

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-  $y$  בנקודה שבה  $y=-6$ .  
מצאו את הפונקציה.

4) נתונה נגזרת של פונקציה :  $f'(x) = 2x - 6$ .

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.  
מצאו את הפונקציה.

5) נתונה נגזרת של פונקציה :  $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$ .

שיעור המשיק לפונקציה, בנקודה שבה  $y=5\frac{2}{3}$ , הוא 3.  
מצאו את הפונקציה.

6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה :  $f''(x) = 6x + 6$ .

שיעור הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא  $-12$ ,  
וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.  
מצאו את הפונקציה.

7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה :  $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$ .

שיעור המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר  $y=-4$ .  
מצאו את הפונקציה.

- 8) נתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = 0$ ,  
 ונתון בנוסף כי לכל  $x_0$  ממשי:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$
- מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.
  - חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
  - מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
  - מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.
  - תהי  $G(x)$  פונקציה קדומה של  $|x|$ .  
 חשבו את הנגזרת  $'(G(x) - f(x))$ .

### תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12\frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12\frac{1}{2}\sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3}(x-1)^3 - 18\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

8) ג. נקודת חיתוך אחת  $(0,0)$ .      ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

ה. 0      ד. נקודת פיתול אחת  $(0,0)$ .

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 2 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים.....  
6 .....

## אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

### שאלות

**הערה:** את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת הצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3)$$

$$\int \cot x dx \quad (2)$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5)$$

$$\int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9)$$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8)$$

$$\int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \quad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15)$$

$$\int \sin(x^2+1) x dx \quad (14)$$

$$\int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24)$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23)$$

$$\int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (22)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{3} \ln|x^3 + 1| + c \quad (3)$$

$$\ln|\sin x| + c \quad (2)$$

$$\ln|x^2 + 1| + c \quad (1)$$

$$e^x \ln|e^x + 1| + c \quad (6)$$

$$\ln|\ln|x|| + c \quad (5)$$

$$-\ln|\cos x| + c \quad (4)$$

$$-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c \quad (9)$$

$$e^{\tan x} + c \quad (8)$$

$$e^{x^2} + c \quad (7)$$

$$\sin(\ln x) + c \quad (12)$$

$$\sin(\sin x) + c \quad (11)$$

$$\sin(2x^2 + 1) + c \quad (10)$$

$$-2 \cos(\sqrt{x}) + c \quad (15)$$

$$-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{40} \sin(10x^4 + 1) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} (\tan x)^2 + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{2} (\arctan x)^2 + c \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} (\ln x)^2 + c \quad (16)$$

$$\frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c \quad (21)$$

$$\sqrt{2 \sin x} + c \quad (20)$$

$$2\sqrt{x^2 + 1} + c \quad (19)$$

$$\frac{2}{3} (\arctan x)^{\frac{3}{2}} + c \quad (24)$$

$$\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c \quad (23)$$

$$\frac{2}{9} (x^3 + 4)^{\frac{3}{2}} + c \quad (22)$$

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

### פרק 3 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

#### תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים .....

8.....

## אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלוקת

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3)$$

$$\int x^4 \ln x dx \quad (2)$$

$$\int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \quad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8)$$

$$\int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11)$$

$$\int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int x \arctan x dx \quad (14)$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17)$$

$$\int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20)$$

$$\int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23)$$

$$\int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

$$(24) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int x^n e^x dx \text{ באשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(25) \text{ חשבו את } \int x^4 e^x dx.$$

$$(26) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int \cos^n x dx \text{ באשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(27) \text{ חשבו את } \int \cos^4 x dx.$$

**28)** מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int \sin^n x dx$  כאשר  $n$  טבעי.

**29)** חשבו את  $\int \sin^4 x dx$ .

**30)** מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$  כאשר  $n$  טבעי.

**31)** חשבו את  $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$

**32)** חשבו את האינטגרלים  $\int e^{ax} \cos bx dx$ ,  $\int e^{ax} \sin bx dx$ .

## תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left( \ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left( \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln|x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left( \frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x (\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left( -\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4}(\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5(\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n}(-(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4}(-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5(x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left( \frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bx dx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

### פרק 4 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

- 12 ..... 1. אינטגרלים בשיטת ההצבה

## אינטגרלים בשיטת ההצבה

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \qquad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \qquad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \qquad \int \ln^3 x dx \quad (14) \qquad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \qquad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \qquad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \qquad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left( \frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5} - \frac{4}{3} \left(\sqrt{x^3+4}\right)^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left( \frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \left( x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \right) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} \left( \sqrt[3]{x}^2 - 2\sqrt[3]{x} + 2 \right) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left( x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left( \frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left( \ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x \left( \ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6 \right) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln|\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left( -\frac{1}{1-x^4} - \ln|1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6 \left( \sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x} \right) + c \quad (23)$$

$$\frac{\left( \sqrt[3]{x^3 + 1} \right)^7}{7} - \frac{\left( \sqrt[3]{x^3 + 1} \right)^4}{4} + c \quad (24)$$

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 5 - אינטגרלים של פונקציות רצינליות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רצינלית ..... 15

## אינטגרלים של פונקציה רצינלית

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x+5}{(x^2 - 2x + 1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2 + 5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 5x + 6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{10x}{x^4 - 13x^2 + 36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2 + 4x - 6}{x^3 - 7x - 6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3 + x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 4x + 4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{9x + 36}{x^3 + 6x^2 + 9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)(x + 2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2 + x - 1}{(x^2 + 1)(x - 3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2 + 4)^2} dx \quad (19)$$

### תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctan \left( \frac{x+0.5}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left( \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left( \arctan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

# חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 6 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא .....	(ללא ספר) .....
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות .....	17 .....
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות.....	19 .....
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית.....	20 .....
5. הצבות טריגונומטריות שມטרתן להיפטר משורשים.....	21 .....
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות.....	24 .....

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכור כי :

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int \tan x dx = -\ln  \cos x  + c$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln  \cos(ax+b)  + c$
$\int \cot x dx = \ln  \sin x  + c$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln  \sin(ax+b)  + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\cos^2 4x} \quad (2)$$

$$\int \left( \sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx \quad (1)$$

$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 10x} \quad (3)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6)$$

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5)$$

$$\int \tan^2 x dx \quad (8)$$

$$\int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2} \quad (9)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12)$$

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11)$$

$$\int \sin^2 4x dx \quad (14)$$

$$\int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15)$$

$$\int \sin^4 4x dx \quad (18)$$

$$\int \cos^4 x dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24)$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23)$$

**תשובות סופיות**

$$\frac{1}{4} \tan 4x + c \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (4)$$

$$-10 \cot 10x + c \quad (3)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (5)$$

$$\tan x - x + c \quad (8)$$

$$-\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{12} \cos 12x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \quad (10)$$

$$\tan x - \cot x + c \quad (9)$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad (12)$$

$$\sin x + c \quad (11)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13)$$

$$-\frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 12x + c \quad (16)$$

$$\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + c \quad (15)$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad (18)$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (17)$$

$$2 \sin x + c \quad (20)$$

$$-\cot x - x + c \quad (19)$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad (22)$$

$$\ln |\cos x| + c \quad (21)$$

$$3x + \frac{1}{2} \sin 2x - 2 \sin x + c \quad (23)$$

$$\frac{1}{8} \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x \right) + c \quad (24)$$

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right| = \int f(t) dt$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right| = \int f(t)(-dt)$$

זכור כי:

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

(2)  $\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx$

(1)  $\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx$

(4)  $\int \sin^3 2x dx$

(3)  $\int \cos^3 x dx$

(6)  $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$

(5)  $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$

(8)  $\int \tan^5 x dx$

(7)  $\int \cos^5 x dx$

(10)  $\int \frac{dx}{\sin x}$

(9)  $\int \frac{1}{\cos x} dx$

(12)  $\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx$

(11)  $\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx$

### תשובות סופיות

(2)  $\frac{-\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c$

(1)  $\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c$

(4)  $-\frac{1}{2} \left( \cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c$

(3)  $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$

(6)  $-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c$

(5)  $\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c$

(8)  $\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c$

(7)  $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c$

(10)  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c$

(9)  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c$

(12)  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c$

(11)  $-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c$

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

זכור כי:

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2)$$

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} + c \quad (1)$$

$$\ln \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c \quad (2)$$

$$-x + 2 \left( \frac{2}{3\sqrt{\frac{1}{3}}} \arctan \left( \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{\frac{1}{3}}} \right) \right) + c \quad (3)$$

## הצבות טריגונומטריות שמשתרתן להיפטר משורשים

$$\boxed{\begin{aligned} \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt) \\ \int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right) \\ \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right) \end{aligned}}$$

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx \quad (2)$$

$$\int \sqrt{4x^2-1} dx \quad (3)$$

הערה : כדי לפתרו את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רצינליות".

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x^2+2x-3} dx \quad (6)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \quad (11)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{1}{4} \cot\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \right| + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \left[ \ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \right] + c \quad (3)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + c \quad (4)$$

$$2 \left\{ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \left( \arcsin\frac{x}{2} \right)\right) \right\} + c \quad (5)$$

$$\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} + c \quad (6)$$

$$\frac{9}{2} \left\{ \arcsin \frac{x+3}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin \frac{x+3}{3}\right) \right\} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{16} \left\{ \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arctan \frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} \right\} + c \quad (10)$$

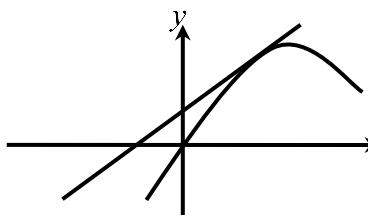
$$\ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c \quad (11)$$

## חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

### שאלות

1) נתונה הפונקציה  $f(x) = x + 2 \sin x$ .

בתוחום שבין ראשית הצירים لنקודת המקסימום הראשונה  
מייננה העבירו לפונקציה משיק ששיופעו 1.

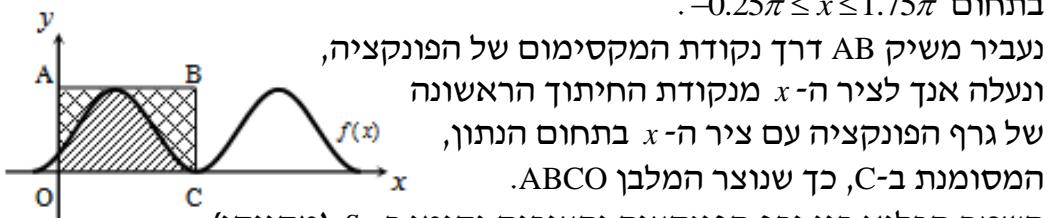


א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,  
המשיק וציר ה- $x$ , בריבוע הראשון והשני.

2) באIOR שלහן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$

בתוחום  $\pi/2 \leq x \leq 5\pi/4$ .



נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה,  
ונעליה אנך לציר ה- $x$  מנקודת החיתוך הראשונה  
של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנตอน,

המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- $S_1$  (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- $y$  יסומן ב- $S_2$ .

א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשבו את היחס  $\frac{S_1}{S_2}$ .

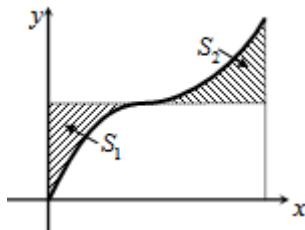
3) באIOR שלහן נתונה הפונקציה  $y = \sin x + x$ , בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

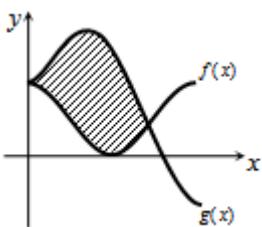
א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנตอน? הוכיחו זאת.

ב. נוריד אנך מגראף הפונקציה לציר ה- $x$  בנקודת שבה  $x = 2\pi$ ,

ונעביר ישר המקביל לציר ה- $x$  מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.

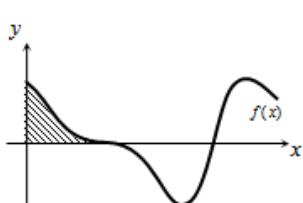
הראו כי השטחים המסומנים בشرطוט,  $S_1$  ו- $S_2$ , שוויים.





4) באIOR שלහלן מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \cos^2 x$  ו-  $g(x) = \sin^2 x + \cos x$ , בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

- מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
- חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
- השתמשו בזיהות  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ .



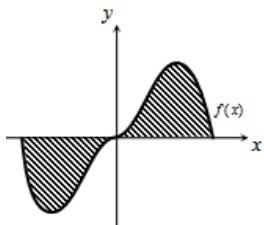
5) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$

- מצאו את שיעורי ה- $x$  של הנקודות המקיים  $f'(x) = 0$ , בתחום  $0 < x < 2\pi$ .

ידוע כי הנקודה המקיימת  $f'(x) = 0$ , אשר אינה קייזון, נמצאת על ציר ה- $x$ .

- מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .

6) באIOR שלහלן מתואר גраф הפונקציה בתחום הנתון. חשבו את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה והצירים.



6) נתונה הפונקציה  $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$

- הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא  $y' = x^2 \sin x$ .

באיור שלහלן נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 \sin x$ , בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

- הראו כי גраф הפונקציה עובר בראשית הצירים.

7) חשבו את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה וציר ה- $x$  בתחום הנתון.

7) נתונה הפונקציה  $f(x) = a \cos x + b \sin x$ , כאשר  $a, b$  פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{4}$

והיא חיובית בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  הוא  $2\sqrt{2} - 2$ .

מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו-  $b$ .

### תשובות סופיות

ב.  $\pi$  ייח"ש.      א.  $y = x + 2$  (1)

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538 \quad \text{ב. } y = 1 \quad \text{א. } (1)$$

2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה  $(\pi, \pi)$  היא נקודת פיתול.

$$S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934 \quad \text{ב. } S = 1.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299 \quad \text{ב. } (0,1), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}\right) \quad \text{א. } (3)$$

$$\text{ג. } f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x \quad \text{ב. } x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \quad \text{א. } (4)$$

.  $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$       ב. שאלת הוכחה.      א. שאלת הוכחה. (5)

$$b = -2, a = 2 \quad (6)$$

## נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(a + \beta) + \sin(a - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(a - \beta) - \cos(a + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(a + \beta) + \cos(a - \beta)) \end{cases}$$

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

### פרק 7 - שימושי האינטגרל המסוים (שטח-אורך קשת)

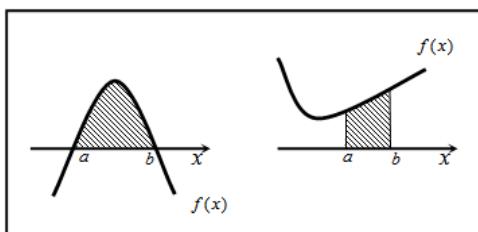
#### תוכן העניינים

28 .....	1. חישוב שטחים .....
48 .....	2. אורך קשת .....

## חישוב שטחים

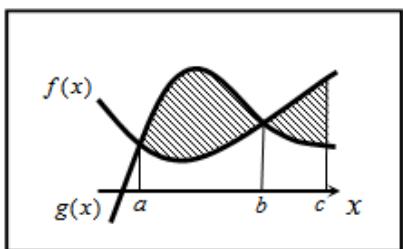
### חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$ :



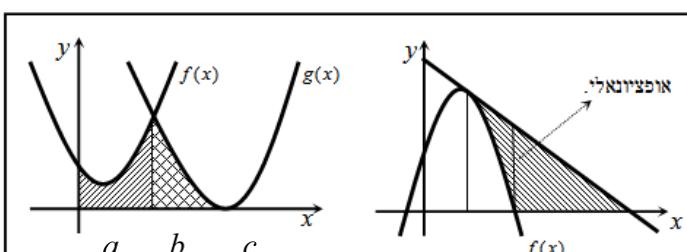
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני:

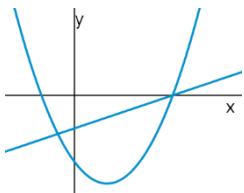


$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \\ S_2 &= \int_b^c (f(x) - g(x)) dx \\ S &= S_1 + S_2 \end{aligned}$$

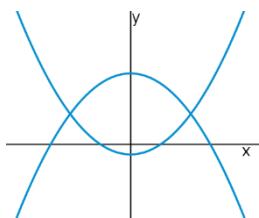
3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$ :



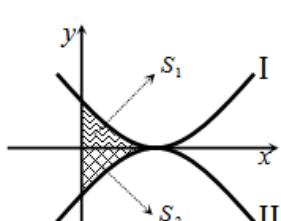
$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

**שאלות**

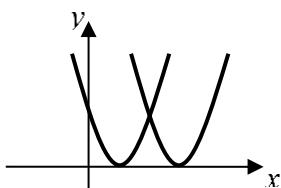
- 1) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 4x - 12$  ו-  $g(x) = x - 6$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של  $f$  ו-  $g$ .



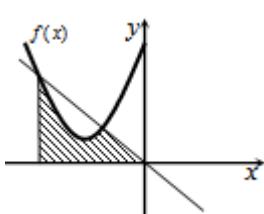
- 2) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = 7 - x^2$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של  $f$  ו-  $g$ .



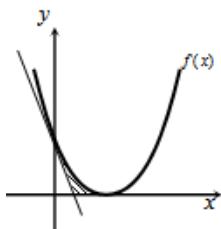
- 3) נתונות הפונקציות  $f(x) = (x-2)^2$  ו-  $g(x) = -(x-2)^2$ ,  
 כמפורט באירור.  
 א. התאימו בין הפונקציות לgrafים I ו-II.  
 ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים  
 ב-  $S_1$  ו-  $S_2$ , כמפורט באירור.  
 הראו כי השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$  שווים זה לזה.



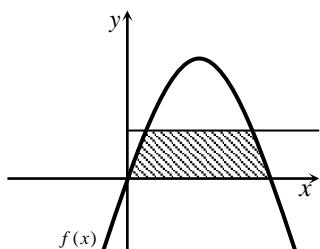
- 4) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ,  $g(x) = x^2 - 6x + 9$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה-  $x$ .



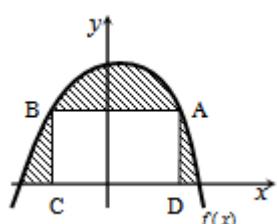
- 5) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 + 6x + 12$ .  
 ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה  
 בנקודת שבה  $x = -4$ , כמפורט באירור.  
 א. מצאו את משוואת הישר.  
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.  
 ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה-  $x$  והישר  $x = -4$ .



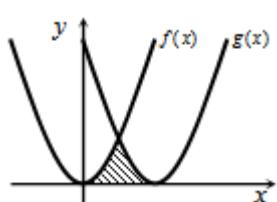
- 6) נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-2)^2$ .  
 בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  נעביר משיק.  
 א. מצאו את משוואת המשיק.  
 ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .  
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



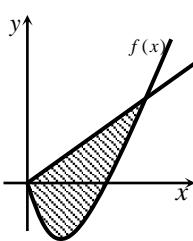
- 7) נתונה הפונקציה  $f(x) = kx - x^2$ .  
 הישר  $y=9$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.  
 ידוע כי שיעור ה- $x$  של אחת מנקודות אלה הוא  $9=x$ .  
 א. מצאו את ערך הפרמטר  $k$ .  
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.  
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



- 8) הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ , המתוארכת באיוור שלහלן,  
 היא  $y = 3 - 2x$ . ישר  $AB$ , שמשוואתו  $6 = f(x)$  חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודות  $A$  ו- $B$ .  
 מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$ , כך שנוצר מלבן  $ABCD$ .  
 ידוע שהשיעור ה- $x$  של הנקודה  $A$  הוא  $4=x$ .  
 א. מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .  
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$  (השטח המסומן).

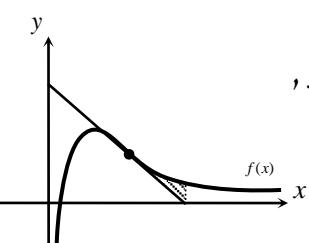


- 9) באיוור שלහלן חותך גרף הפונקציה  $f(x) = x^2$  את גרף הפונקציה  $g(x)$ , בנקודת שבה  $x=2$ .  
 הנגזרת של הפונקציה  $g(x)$  היא  $g'(x) = 2x - 8$ .  
 א. מצאו את הפונקציה  $g(x)$ .  
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$  (השטח המסומן).

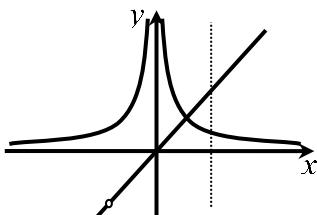


- . 10) באյור שלහלן מתוארים גראף הפונקציה  $f(x)$  והישר  $x$ .  $y = 2x$  נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = 2x - 6$ , וידוע כי הישר חותך את הפונקציה בנקודה שבה ערך ה- $y$  הוא 16. א. מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .

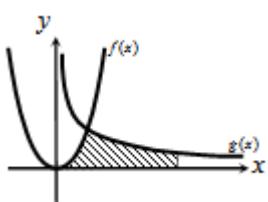
- ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.  
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גראף הפונקציה והישר.



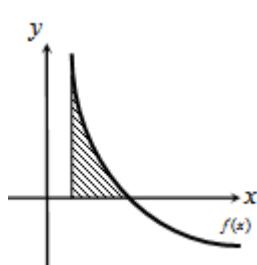
- . 11) ענו על הסעיפים הבאים:  
א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$  מצאו את משוואת המשיק שSHIPOUו מינימלי.  
ב. באյור שלහלן מתוארים הגרפים של הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף א'. חשבו את השטח הכלוא בין גראף הפונקציה, המשיק, ואנד לציר ה- $x$ , היוצא מנקודות החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .



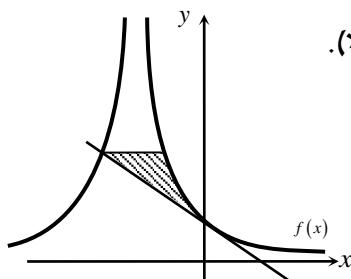
- . 12) נתונות שתי פונקציות  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x+2}$ . חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר  $x = 2$  וציר ה- $x$ .



- . 13) באյור שלහלן מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = 2x^2$  ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$  ( $a$  קבוע), בתחום  $x > 0$ . ידוע כי הגרפים נחתכים ברגע הראשון, בנקודה הנמצאת על הישר  $y = 4x$ .  
א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת  $a$ .  
ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר  $y = 4x$ .



- . 14) גראף הפונקציה  $f(x) = \frac{a-x^2}{x^2}$  ( $a$  קבוע) חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $(6,0)$ .  
א. מצאו את  $a$  וכתבו את הפונקציה.  
ב. חשבו את השטח המוגבל בין גראף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר  $x = 2$ .



15) נתונה הפונקציה  $A$  )  $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$  פרמטר חיובי.

ידעו כי שיפוע הפונקציה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ , הוא  $-\frac{1}{9}$ .

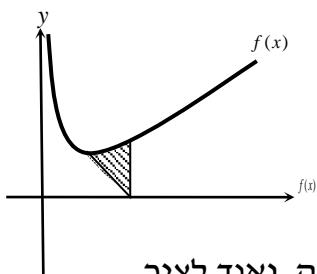
א. מצאו את ערך הפרמטר  $A$ .

ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך עם ציר ה- $y$ .

ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -4.5$ .

ד. העבירו ישר אופקי מנקודות החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודות החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיוור).

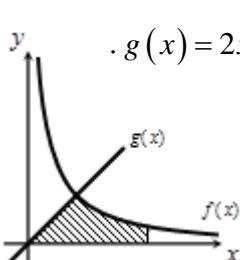


16) באיוור שלහן נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$ .

א. מצאו את נקודות המינימום שלה.

ב. מנקודות המינימום של הפונקציה נعبر ישר לנקודה  $(2,0)$ , שעל ציר ה- $x$ .

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- $x$ , היוצא מנקודה  $(2,0)$  עד לנקודות החיתוך עם גרף הפונקציה.



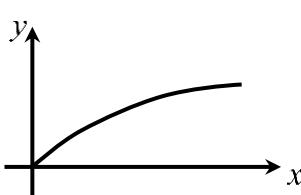
17) באיוור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות  $g(x) = 2x$  ו-  $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$ .

א. מצאו את נקודות החיתוך של הגрафים.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגראפים, ציר ה- $x$  והישר  $x = 9$ .

18) נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$ .

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודות המינימום שלה וציר ה- $y$ .



19) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  בריבוע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים, חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

המשיק והישר  $\sqrt{3} = x$ .

20) באյור שלහלן מתואר גраф הפונקציה  $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

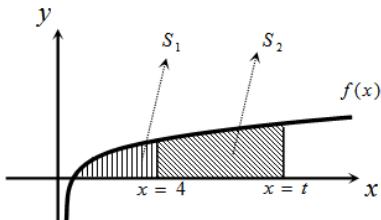
נעביר שני אנקים לציר ה- $x$ ,  $x = 4$  ו-  $x = t$  (כאשר  $t > 4$ ).

נסמן את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה וציר ה- $x$  ב-  $S_1$ ,

ואת השטח הכלוא בין גраф הפונקציה, ציר ה- $x$  והאנקים ב-  $S_2$ .

ידעו כי  $S_2 = 8S_1$ .

מצאו את  $t$ .



21) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x}}$

א. ענו על השעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה שיפועו הוא  $\frac{17}{16} m$ .

מצאו את נקודת ההשכה.

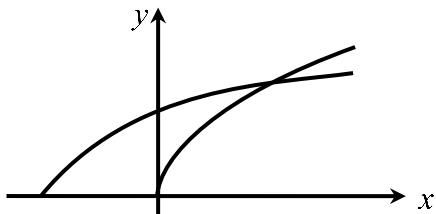
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה, ציר ה- $x$  ואנק לציר ה- $x$  מנקודת ההשכה שמצויה בסעיף הקודם.

22) נתונות שתי פונקציות  $f(x) = \sqrt{x+b}$ ,  $g(x) = \sqrt{2x}$ , כאשר ( $b > 0$ )

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

ציר ה- $x$  הוא  $\frac{2}{3}$  יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר  $b$ .



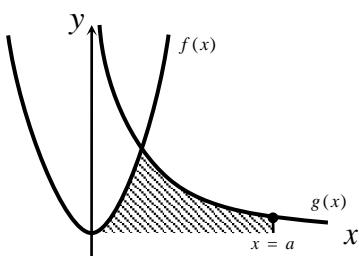
23) באյור שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x) = x^2$  ו-  $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$

בריבוע הראשון.

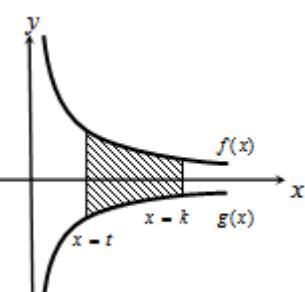
נעביר ישר  $x = a$ , החותך את גраф הפונקציה  $g(x)$  ויצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר (השטח המסומן).

ידעו כי שטח זה שווה ל-  $S = \frac{1}{3} 85$ .

מצאו את  $a$ .



24) באIOR שלහן מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$  ו-  $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$  ו-  $x = t$ , אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות

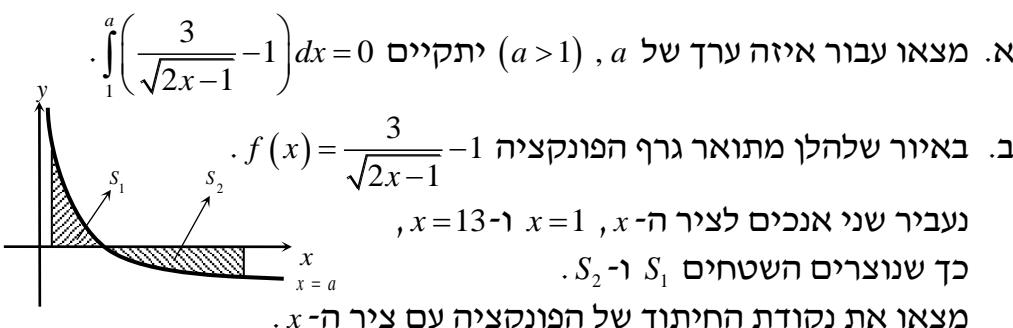


ונוצרים את הקטעים AB ו-CD. ידוע כי  $AB = 2CD$ .

א. הראו כי  $k = 4t$ .

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות לבין הישרים  $x = t$  ו-  $x = k$ , הוא  $S = 12$ . מצאו את  $t$ .

25) ענו על הטעיפים הבאים:



א. מצאו עבור איזה ערך של  $a$  (  $a > 1$  ) יתקיים  $\int_1^a \left( \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$ .

ב. באIOR שלහן מתואר גוף הפונקציה  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$ ,  $x = 1$  ו-  $x = 13$ . נקבע שני אנכים לציר ה- $x$ , אחד בנקודה  $x = a$  ו-  $S_2$  ו-  $S_1$ .

מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

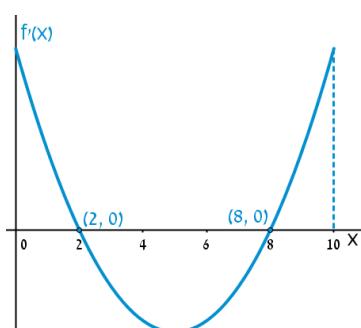
ג. ענו על תתי-הטעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גוף הפונקציה,

ציר ה- $x$  והאנך  $x = 1$ , כולם את  $S_1$ .

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו כמה שווה השטח  $S_2$ .

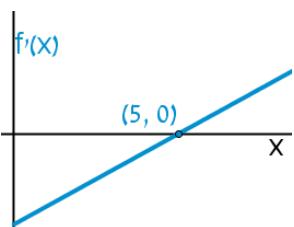
נקו.



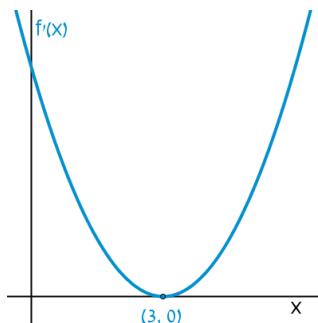
26) הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 10$  בציור מתואר גוף הנגזרת  $f'(x)$ .

א. שרטטו סקיצה של גוף הפונקציה  $f(x)$ ,  $f(5) = 0$ ,  $f(0) = -4$ ,  $f(2) = 6$  ו-  $f(10) > 0$ .

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י גוף הנגזרת והצירים בריבוע הראשון, עד לנקודת שבה  $x = 2$ .

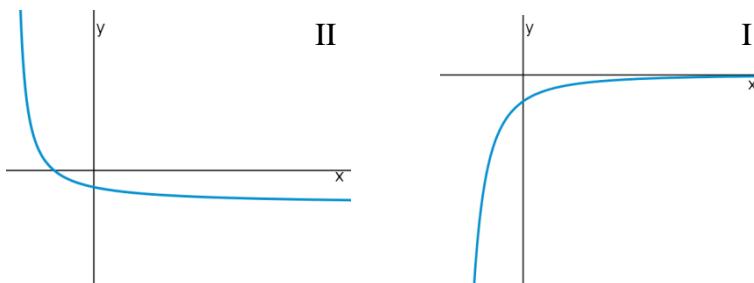


- 27) להלן גרף הפונקציה  $f'(x)$ , אשר חותך את ציר ה- $x$  בנקודה אחת בלבד,  $(5,0)$ .
- מצאו את התחומים שבהם  $f'(x)$  חיובית, ואת התחומים שבהם היא שלילית.
  - קבעו מהם תחומי העליה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .
  - כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע כי שיעור ה- $y$  שלו הוא  $-2$ .
  - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $y$  כאשר  $y = 8$ .
  - חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  והצירים.



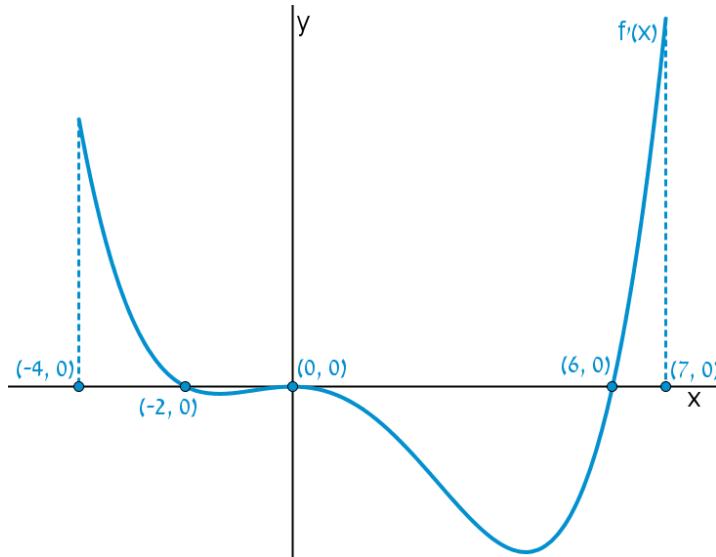
- 28) באIOR שלහלן מתוארכות הנגזרת  $f'(x)$ .
- האם לפונקציה  $f(x)$  יש נקודות קיצון? נמקו.
  - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע כי  $f(3) = 4$ , וכי היא חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -5$ .
  - חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  והצירים בריבוע הראשון.

29) באIORים שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $f'(x)$ :



- זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.
- נתון  $f(10) = -3$ , וכי  $f'(x)$  חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -2$ . מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת  $f'(x)$ , הצירים והישר  $x = 10$ ?

30) נתון גרף הנגזרת  $f'(x)$

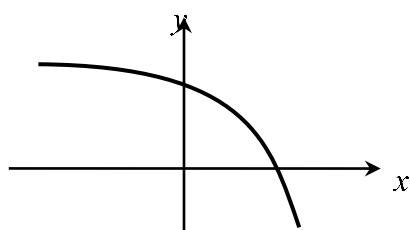


- א. שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-4 \leq x \leq 7$ ,  
 לפי הנתונים  $f(0) = -2$ ,  $f(-2) = 7.6$ ,  $f(6) = -606.8$ .
- ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת לציר ה- $x$  בריבוע השלישי.  
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת לציר ה- $x$  בריבוע הרביעי.

## פונקציות מעריכיות

### אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

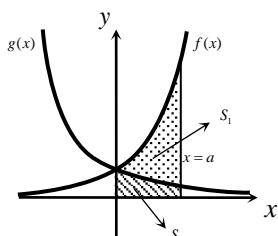
אינטגרלים יסודים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



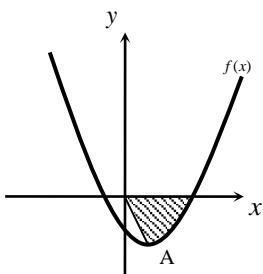
31) נתונה הפונקציה  $f(x) = 5 - e^x$ .  
 העבירו לפונקציה משיק ששיופעו  $-e$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין  
 הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .  
 ניתן להשאיר  $e$  ו- $\ln$  בתשובה.

32) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{bx}$ , כאשר  $0 > b$ .  
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים  
 וציר ה- $y$  הוא  $\frac{e-2}{4}$ .  
 מצאו את ערכו של הפרמטר  $b$ .

33) נתונות הפונקציות  $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$  ו-  $g(x) = e^{-x}$ .  
 מנוקודה הנמצאת על גרף הפונקציה  $(x, g)$  בربיע הראשון הורידו אנך לשני  
 הצירים. המשך האנד לציר ה- $y$  חותך את הפונקציה  $f(x)$ ,  
 ומנקודות החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- $x$ , כך שנוצר מלבן.  
 הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא  $\frac{3}{e}$ .



34) באIOR שלහן מתוארים גרפים של הפונקציות  
 $f(x) = e^{2x}$  ו-  $g(x) = e^{-2x}$ .  
 נעביר אנך לציר ה- $x$  את הישר  $a = x$ ,  
 כאשר  $0 > a$ , כמתואר באIOR.  
 אנך זה יוצר את השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$ .  
 ידוע כי השטח  $S_1$  גדול פי 3 מהשטח  $S_2$ .  
 מצאו את  $a$ .



$$. \quad f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$$

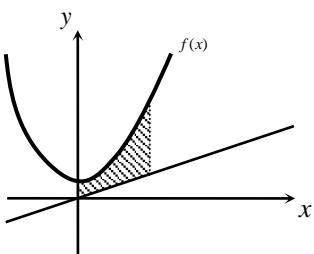
הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתבו את המשוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x=1.7$ .



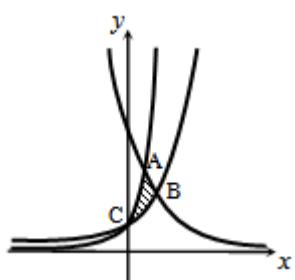
$$. \quad f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$$

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה  $\left(1, \frac{e^3+1}{4e^2}\right)$ .

א. מצאו את  $a$  וכתבו את הפונקציה.

ב. באյור שלහן מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  והישר  $y=0.1x$ .

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- $y$  והאנך  $x=2$ .



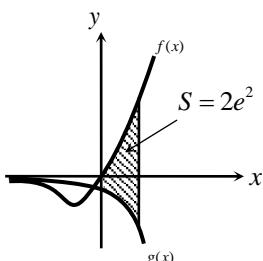
37) באյור שלහן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

$$h(x) = 2^{4-2x} \quad g(x) = 4^x \cdot 2 \quad f(x) = 2^x \cdot 1$$

א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגрафים).

ג. חשבו את השטח המסומן באյור.



38) ענו על הסעיפים הבאים:

א. גוזרו את הפונקציה  $y = e^x(x-1)$ .

ב. באյור שלහן מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x) = xe^x$  ו- $g(x) = -e^x$ .

נעביר ישר  $y = a$ , כאשר  $a > 0$ , החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$  והישר (מקומו).

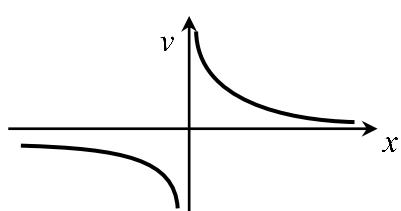
ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$ .

מצאו את  $a$ .

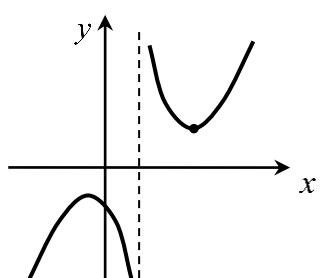
## פונקציות לוגרิตמיות

### אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריטמיות

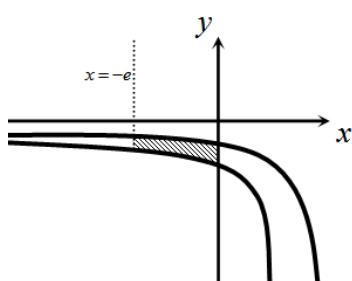
אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + c$



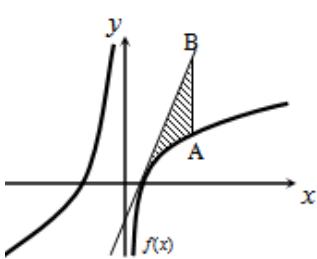
39) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x}$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x = -4$  ו- $x = -1$ , וציר ה- $x$ .  
 ניתן להשאיר  $\ln$  בתשובה.



40) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת שבה  $x = 2$ , ואנך לציר ה- $x$  העובר בנקודת המינימום שלה.  
 אפשר להשאיר ביטוי עם  $\ln$  בתשובה.



41) באIOR שלහן נתונות הפונקציות  $f(x) = \frac{a}{x-1}$  ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$ , בתחום  $x < 0$ .  
 ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודת שבה  $x = 3$ .  
 א. מצאו את  $a$  וכתבו את שתי הפונקציות.  
 ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- $y$  והישר  $x = -e$ .



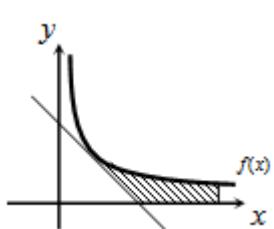
42) נתונה הפונקציה  $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$ .

ידוע כי משווהת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  היא  $y = 18x - 9$ .  
א. מצאו את  $a$  ו-  $b$  וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה- $y$ , שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משווהת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצאו את משווהת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודה החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



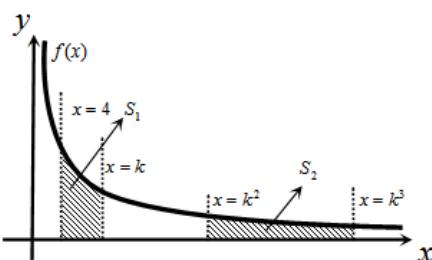
43) נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ .

משווהת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבת 2 היא  $y = 4 - x$ .

א. מצאו את  $f(x)$ .

ב. באյור שלහלן מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$  ומשיק, בתחום  $x > 0$ .

חסבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- $x$  והישר  $x = e^2$ .



44) באյור שלහלן נתונה הפונקציה

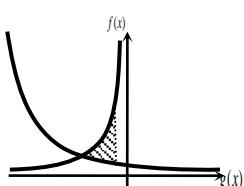
$$f(x) = \frac{2}{x}, \text{ בתחום } x > 0.$$

נעביר את הישרים  $x = k$ ,  $x = k^2$ ,  $x = k^3$  ו-  $x = 4$ , כמתואר באյור ( $x > 4$ ).

א. הבינו באמצעות  $k$  את השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$ .

ב. הראו כי ההפרש  $S_2 - S_1$  אינו תלוי ב- $k$ , וחסבו את ערכו.

ג. נתון כי השטח  $S_2$  גדול פי 3 מהשטח  $S_1$ .  
מצאו את  $k$ .

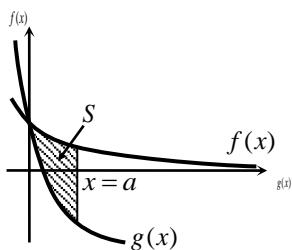


45) נתונות הפונקציות  $g(x) = \frac{k}{2x+5}$  ו-  $f(x) = -\frac{4}{x}$

גרף  $(x) g$  חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבת 4.  
א. מצאו את הפונקציה  $(x) g$ .

ב. מצאו את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר  $x = -1$ .



46) באյור שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות

$$g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x}) \quad f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$$

בתחום  $x \geq 0$ .

א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$ .

ב. נعتبر ישר  $x = a$  ( $a > 1$ ), המאונך

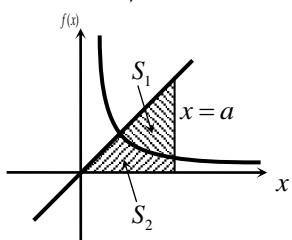
לציר ה- $x$ , חותך את הגרפים של שתי

הfonקציות ויוצר את השטח  $S$  (ראה איור).

מצאו את ערכו של  $a$ , עבורו מתקיים  $S = 4$ .

47) באյור שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{3x-1}$  והישר  $x = a$ .

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, בربיע הראשון.



נعتبر א נקודה לציר ה- $x$ ,  $x = a$ , הנמצאו מימין

לנקודת החיתוך שמצויה בסעיף הקודם.

הנקה חותך את הגרפים ויוצר את השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$ , המתוארים באյור.

ב. מצאו את הערך של  $a$ , עבורו השטח  $S_2$

$$\text{יהיה שווה ל- } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$$

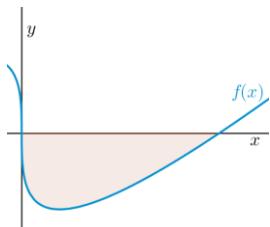
ג. עבור ערך ה- $a$  שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים  $\frac{S_1}{S_2}$ .

## פונקציית חזקה עם מעיריך רצionarioלי

### אינטגרלים מיידיים של פונקציית חזקה עם מעיריך רצionarioלי

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m+1}{n}}}{\frac{m+1}{n}} + C$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m+1}{n}}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + C$

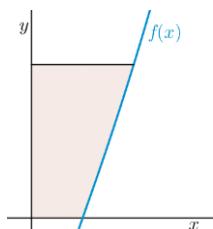
תנאי לקיום האינטגרציה  $\frac{m}{n} \neq -1$ .



.  $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$

א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-  $x$ .

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והציר.



.  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$

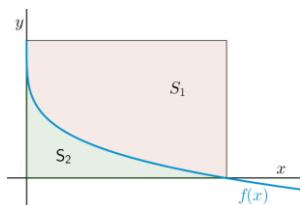
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-  $x$ .

ג. נעביר אנך לציר ה-  $y$  מנקודה (4,6).

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והציר,

בריבוע הראשון.



.  $f(x) = 2 - 4\sqrt[3]{x}$

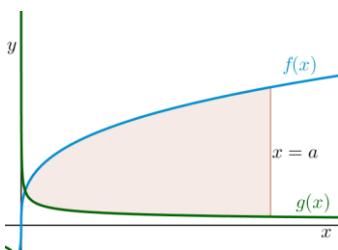
נעביר אנכים לצירים מנוקודות החיתוך של גרף

הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבדו,

ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והציר ב-  $S_1$ ,

ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב-  $S_2$ .

מצאו את היחס  $\frac{S_1}{S_2}$ .



51) באյור שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות

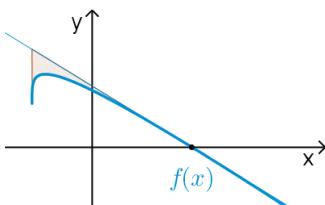
$$\cdot g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ ו- } f(x) = 4\sqrt[3]{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום  $0 < x$ .

ב. נعتبر אנך לציר ה- $x$ ,  $x = a$  ( $a$  פרמטר). ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנוקדת החיתוך שלהם ועד לאנך,

$$\text{הוא } 42 \frac{3}{16} \text{ יח"ש.}$$

מצאו את  $a$ .



52) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$ ,  $a$  פרמטר.

ידוע כי גраф הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודת שבה  $x = 2$ .

א. מצאו את הפרמטר  $a$  וכתבו את הפונקציה.

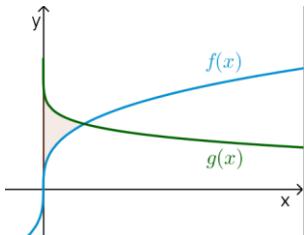
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

ה. באյור שלහלן מתואר גраф הפונקציה  $f(x)$  והמשיק שמצאנו בסעיף הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאנו בסעיף ג'.

חשבו את השטח הנוצר בין גраф הפונקציה  $f(x)$  והמשיק.

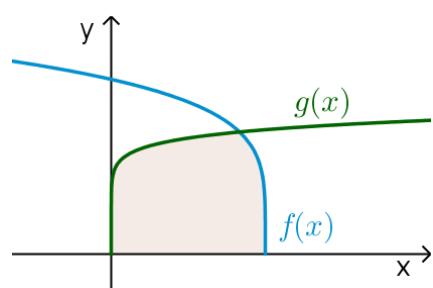


53) באյור שלහלן נתונים גרפים של הפונקציות

$$\cdot f(x) = 2 - \sqrt[6]{x} \text{ ו- } g(x) = \sqrt[3]{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$ .

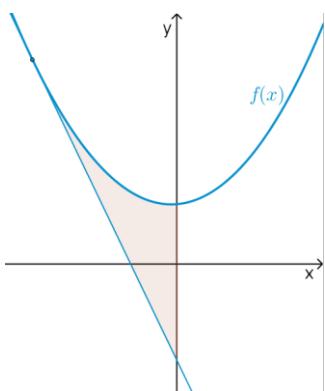


54) הנזורה של  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$

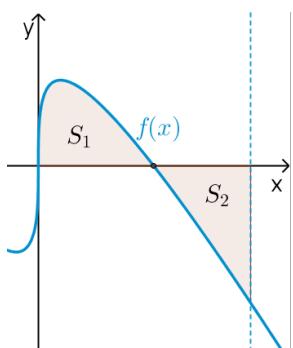
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודת שבה  $x = 1.2$ .

א. מצאו את  $f(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גראף הפונקציה  $f(x)$ , גראף הפונקציה  $g(x) = \sqrt[10]{x}$  וציר ה- $x$ .



- 55) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$ .  
 א. מצאו את משועצת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -3$ .  
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין גורף הפונקציה  $f(x)$ , המשיק וציר ה- $y$ .



- 56) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$ .  
 א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
 ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ג. באIOR שלහן מתוארך גורף הפונקציה בריבוע הראשון. השטח הכלוא בין גורף הפונקציה וציר ה- $x$  יסומן ב-  $S_1$ .  
 נعتبر ישר  $k = x$ , אשר יוצר את השטח  $S_2$ , כמתואר באIOR.  
 מצאו את  $k$ , אם ידוע כי  $S_1 = S_2$ .

**תשובות סופיות**

.ג.  $57\frac{1}{6}$  יחס'ש. (1)

.ב.  $21\frac{1}{3}$  יחס'ש. (2)

.ב. שאלת הוכחה.  $g(x) = \Pi, f(x) = I$ . א. (3)

.ג.  $\frac{2}{3}$  יחס'ש. (4)

.ג.  $7\frac{5}{6}$  יחס'ש. ב.  $(-3,3)$  ב. א.  $y = -x$  (5)

.ג.  $\frac{2}{3}$  יחס'ש. ב.  $(1,0)$  ב. א.  $y = -4x + 4$  (6)

.ג.  $81\frac{1}{3}$  יחס'ש. ב.  $(1,9)$  ב. א.  $k = 10$  (7)

.ב.  $27\frac{1}{6}$  יחס'ש.  $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ . א. (8)

.ב.  $5\frac{1}{3}$  יחס'ש.  $g(x) = (x-4)^2$ . א. (9)

.ג.  $85\frac{1}{3}$  יחס'ש. ב.  $(0,0)$  ב.  $f(x) = x^2 - 6x$ . א. (10)

.ב.  $\frac{1}{8}$  יחס'ש.  $y = -x + 2$ . א. (11)

.ג. 1 יחס'ש. (12)

.ב.  $13\frac{1}{3}$  יחס'ש.  $(2,8), a = 32$ . א. (13)

.ב. 8 יחס'ש.  $f(x) = \frac{36-x^2}{x^2}, a = 36$ . א. (14)

.ה.  $\frac{5}{8}$  .ג.  $\left(-1.5, \frac{2}{3}\right)$  .ד.  $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$  .ב.  $A = 6$ . א. (15)

.ב. 1.75 יחס'ש.  $\min(0.5, 1.5)$ . א. (16)

.ב. 48 יחס'ש.  $(4, 8)$ . א. (17)

.ג. 2.26 יחס'ש. (18)

.ג. 0.5 יחס'ש. (19)

$t = 16$  (20)

.ג. 88 יחס'ש.  $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$ . iii.  $(4, 0)$  .ii.  $x > 0$  .i. א. (21)

$b = 2$  (22)

$a = 9$  (23)

(24) א. שאלת הוכחה.  $t=1$  ב.

.  $S_2 = |-S_1| = 2 \cdot ii$        $S_1 = 2 \cdot g.i.$       (5,0)      א. (25)  $a=13$

ב. 10 יחס'ש.

(27) א. חיובית:  $x < 5$ , שלילית:  $x > 5$ . ב. עולה:  $x < 5$ , יורדת:  $x > 5$ .

ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יחס'ש. ג.  $\min(5, -2)$

(28) א. לא. הנקודה (3,0) היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.

ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יחס'ש.

ב. 1 יחס'ש. א. (29)  $f(x): II, f'(x): I$

. ג. 604.8      ב. 9.6      א. שאלת הוכחה. (30)

ג. 1 יחס'ש. (31)  $S = 0.192$

b = 2 (32)

(33) שאלת הוכחה.

a = ln 2 (34)

. ג.  $S = 4.744$       ב.  $y = -(e+2)x$       א. (35)  $A(1, -e-2)$

1.52      ב.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$ , a = -2 . א. (36)

. ג.  $S = 1.03$       ב.  $A(1,4), B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right), C(0,1)$  (37)

a = 2      ב.  $y' = xe^x$  . א. (38)

ג. יחס'ש. (39)  $S = \ln 4$

. ג. יחס'ש. (40)  $S = 4 \ln 2 - 2$

. ב.  $S = 1.76$       ב.  $f(x) = \frac{2}{x-1}, g(x) = \frac{1}{x-2}$ , a = 2 . א. (41)

. ב.  $x = 2$       ב.  $f(x) = 7 + 2x - \frac{4}{x}$ , a = 2 , b = -4 . א. (42)

. ג.  $S = 6 + \ln 256 \approx 11.54$  יחס'ש.

. ב.  $S = 6 - 4 \ln 2$       ב.  $f(x) = \frac{4}{x}$  . א. (43)

. ג.  $k = 8$  . ב.  $S_2 - S_1 = \ln 16$       ב.  $S_1 = 2 \ln k - \ln 16$ ,  $S_2 = 2 \ln k$  . א. (44)

. ג.  $S = \ln 5 \frac{1}{3} \approx 1.674$  . ב.  $(-2, 2)$       ב.  $g(x) = \frac{2}{2x+5}$  . א. (45)

. ג.  $a = 2$  . ב. (46)

. ג.  $\frac{S_1}{S_2} = 5.955$  . ב.  $a = 5$       ב.  $(1,1)$  . א. (47)

. ב.  $S = 16$  יחס'ש. א. (48)  $(0,0), (8,0)$

. ג.  $S = 18.149$  . ב.  $(2,0)$       א.  $x > 0$  . א. (49)

$$\frac{S_1}{S_2} = 4 \quad (50)$$

$$a=8 \quad \text{ב.} \quad \left( \frac{1}{8}, 2 \right) \quad \text{א.} \quad (51)$$

$$(-1.2, 1.2) \quad \text{ג.} \quad x \geq -1.2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, a=1 \quad \text{א.} \quad (52)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ה.} \quad y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16} \quad \text{ט.}$$

$$S = \frac{11}{28} \quad \text{ב.} \quad (1,1) \quad \text{א.} \quad (53)$$

$$S = 1\frac{5}{66} \quad \text{ב.} \quad f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א.} \quad (54)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ב.} \quad y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א.} \quad (55)$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296\dots \quad \text{ג.} \quad (0,0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad .x \quad \text{א. כל} \quad (56)$$

## אורקשת

### שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון :

$$(1 \leq x \leq 8), \quad y = x^{2/3} \quad (2)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(0 \leq x \leq 3), \quad y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3)$$

$$(1 \leq x \leq 8), \quad x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6)$$

$$(0 \leq x \leq 3), \quad y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = \ln x \quad (8)$$

$$(0 \leq y \leq 4), \quad x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = x^2 \quad (9)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{1097}{480} \quad (3)$$

$$21 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3} 3^{1.5} \right\} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

$$\frac{8}{243} \left\{ 82^{1.5} - 1 \right\} \quad (7)$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad (8)$$

$$\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17} + 4) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} + 2) \quad (\text{Decimal: } 3.16784) \quad (9)$$

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

### פרק 8 - שימושי האינטגרל המסוים (נפח-שטח מעטפת)

#### תוכן העניינים

- 49 ..... 1. חישוב נפח גוף-סיבוב.

## חישוב נפח גוף-סיבוב

### שאלות

**1)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציות  $y = x^2$  ו-  $y = 1 - 2x$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ .

חשבו את נפח הגוף המתתקבל בשתי דרכים:

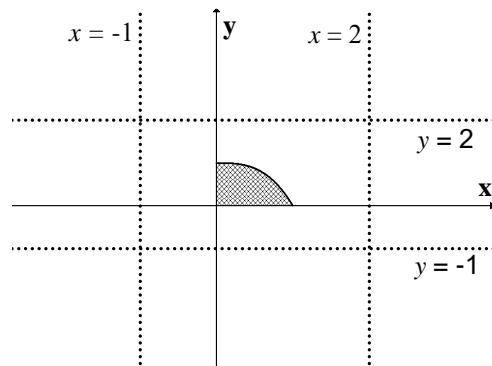
- א. שיטת הדיסקיות (cavalieri).
- ב. שיטת הקלייפות בגליליות.

**2)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציות  $y = x^2$  ו-  $y = 1 - 2x$  מסתובב סביב ציר ה- $y$ .

חשבו את נפח הגוף המתתקבל בשתי דרכים:

- א. שיטת הדיסקיות (cavalieri).
- ב. שיטת הקלייפות בגליליות.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x) = 1 - x^3$  והצירים, מסתובב סביב ציר קלשחו.  
מצאו את נפח הגוף המתתקבל בכלל מקרה בשאלות 3-8:



**3)** ציר ה- $x$ .

**4)** הישר  $y = -1$ .

**5)** הישר  $y = 2$ .

**6)** ציר ה- $y$ .

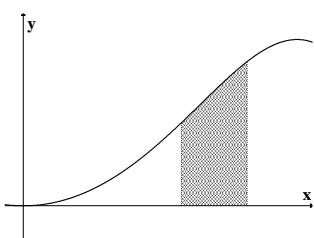
**7)** הישר  $x = -1$ .

**8)** הישר  $x = 2$ .

**9)** נחו ווכיחו את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

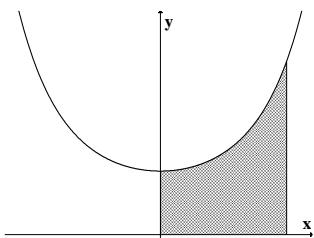
**10)** נחו ווכיחו את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

**11)** נחו ווכיחו את הנוסחה לחישוב נפח כדור.



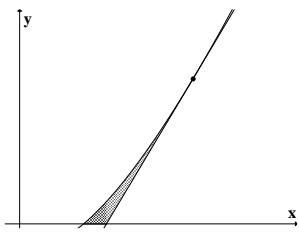
**12)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = \sin(x^2)$

והישרים  $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$ ,  $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$ ,  $y = 0$   
מסתובב סביב ציר ה- $y$ .  
מהו נפח הגוף המתתקבל?



**13)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = e^{x^2}$

והישרים  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$   
מסתובב סביב ציר ה- $x$ .  
מהו נפח הגוף המתתקבל?



**14)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x) = x \ln x$

המשיק לגרף בנקודה  $(e, e)$  וציר ה- $x$ .  
מסתובב סביב ציר ה- $x$ .  
מהו נפח הגוף המתתקבל?

**15)** השטח הכלוא בין הגרפים של  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = 2x + 8$ ,  $x = 0$  מסתובב סביב ישר  $x = 4$ .

מצאו את נפח הגוף הסיבוב שמתתקבל.

### תשובות סופיות

$$\frac{64}{15}\pi \text{ ב.} \quad \frac{64}{15}\pi \text{ א.} \quad \text{(1)}$$

$$\frac{8}{3}\pi \text{ ב.} \quad \frac{8}{3}\pi \text{ א.} \quad \text{(2)}$$

$$\frac{9\pi}{14} \quad \text{(3)}$$

$$\frac{15\pi}{7} \quad \text{(4)}$$

$$\frac{33\pi}{14} \quad \text{(5)}$$

$$\frac{3\pi}{5} \quad \text{(6)}$$

$$2.1\pi \quad \text{(7)}$$

$$\frac{12\pi}{5} \quad \text{(8)}$$

$$V = \pi R^2 \cdot H \quad \text{(9)}$$

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} \quad \text{(10)}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{(11)}$$

$$\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1) \quad \text{(12)}$$

$$\pi(e-1) \quad \text{(13)}$$

$$\frac{e^3-4}{54}\pi \quad \text{(14)}$$

$$128\pi \quad \text{(15)}$$

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 9 - המשפט היסודי של החדו"א, משפטים הערך הממוצע לאינטגרלים

### תוכן העניינים

52 .....	1. המשפט היסודי של החדו"א - תרגילי חישוב.
55 .....	2. המשפט היסודי של החדו"א - תרגילי תיאוריה
58 .....	3. משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

## המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

### שאלות

בשאלות 1 ו-2, על סמך המשפט היסודי של החדו"א, הוכיחו כי אם  $f$  רציפה וגם  $a(x)$  ו- $b(x)$  גזירות, אז:

$$I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) \quad (1)$$

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \quad (2)$$

גזרו את הפונקציות בשאלות 3-6:

$$I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (4)$$

$$I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (6)$$

$$I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (5)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 7-9:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t dt}{\sin^2 x} \quad (7)$$

$$(10) \text{ חשבו את הגבול} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^{x^2} e^{2t^2} dt}$$

**11)** חקרו את הפונקציה  $F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt$ , לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

**12)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 2 + \int_0^x (e^{y^2} + 2)^2 dy$ , כאשר  $g(t) = \int_0^{t^2-1} f(x) dx$ .  
חשבו את  $(g''(x))$  (הוכיחו כי  $f$  רציפה).

**13)** תהי  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.  
נגיד  $x \in \mathbb{R}$   $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$  לכל  
הוכיחו כי  $(g'(x)) = f(x)$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**14)** תהי  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, ויהי  $\alpha \neq 0$ .  
נגיד  $x \in \mathbb{R}$   $g(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x f(t) \sin[\alpha(x-t)] dt$  לכל  
הוכיחו כי  $(f''(x)) = g''(x) + \alpha^2 g(x)$

**15)** תהי  $f$  פונקציה רציפה וחיוונית לכל  $x \geq 0$ .  
 $z(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x t f(t) dt}$  מונוטונית יורדת בקטע  $[0, \infty)$ .  
הוכיחו כי הפונקציה

**16)** מצאו את  $\int_2^x \frac{t^3 - t + 2}{t^2 - t} dt = \int_2^x f(t) dt + 2 \int_2^x \frac{1}{t-1} dt$ , אם נתנו כי  $\int_e^4 f(x) dx$

**17)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $F(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$ , בנקודת  $2\pi$

### תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

$$I'(x) = e^{-x^2} \quad (3)$$

$$I'(x) = \frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2} \cdot 3x^2 \quad (4)$$

$$I'(x) = (x^3 + x)(3x^2 + 1)\ln(x^3 + x) \quad (5)$$

$$I'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \quad (7)$$

$$\frac{2}{3} \quad (8)$$

$$4e^{16} \quad (9)$$

$$0 \quad (10)$$

(11) תחומי הגדרה : כל  $x$ .

נקודות קיצון : אין קיצון, עולה לכל  $x$ .

$$\text{נקודות פיתול : } x = -1, 1, -\frac{3}{7}$$

.  $-1 < x < -\frac{3}{7}$ ,  $x > 1$  תחומי קמירות :

.  $x < -1$ ,  $-\frac{3}{7} < x < 1$  תחומי עיריות :

$$40 \quad (12)$$

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

$$14 - 2\ln 4 - \frac{1}{2}e^2 - e \quad (16)$$

$$y = x - 2\pi \quad (17)$$

## המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי תיאוריה

### שאלות

1) נתונה הפונקציה  $f$  המוגדרת בקטע  $[0, 2]$  כך:

א. הוכיחו ש-  $f$  אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  לכל  $x$  בקטע הנתון.

ג. בדקו האם  $F(x)$  רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם  $? F'(x) = f(x)$

2) נתונה הפונקציה  $f$  המוגדרת בקטע  $[1, 1]$  כך:

א. הוכיחו ש-  $f$  אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את  $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$  לכל  $x$  בקטע הנתון.

ג. בדקו האם  $F(x)$  רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם  $? F'(x) = f(x)$

3) נגדיר  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$. f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

$. F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

נגדיר  $\mathbb{R} \rightarrow F : [-1, 1] \rightarrow$

הוכיחו כי  $F' = f$  ב-  $[-1, 1]$ , אבל  $\int_{-1}^1 f(t)dt$  לא קיים.

האם הדבר עומדת בסתיויה למשפט היסודי של החדו"א?

4) נתונה פונקציה אינטגרבילית  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$. \int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt$

5) תהי  $f$  פונקציה אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ , המקיימת  $\int_a^b f(t) dt > 1$

הוכיחו שקיימים  $x_1, x_2 \in (a, b)$ , כך  $\int_a^{x_1} f(t) dt = 1$ ,  $\int_{x_2}^b f(t) dt = 1$ .

6) תהי  $f$  פונקציה רציפה ומוחזורת לכל  $x$ , עם מחזור  $p$ .

הוכיחו שלaintgral  $\int_x^{x+p} f(t) dt$  יש את אותו הערך לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי הפונקציה  $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$  קבועה בקטע  $(0, \infty)$

ומצאו את הקבוע הממשי  $C$  עבורו מתקיים  $f(x) = C$  לכל  $x \in (0, \infty)$ .

ב. הוכיחו כי  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$  לכל  $x > 0$ .

8) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה ונניח כי  $\int_0^1 f(x) dx = 1$

הוכיחו שקיים נקודה  $c \in (0, 1)$  כך ש-  $f(c) = 3c^2$ .

9) תהי  $f$  פונקציה רציפה ב-  $[0, \pi/2]$  ונניח כי  $\int_0^{\pi/2} f(t) dt = 0$

הוכיחו שקיים נקודה  $c \in (0, \pi/2)$  כך ש-  $f(c) = 2 \cos 2c$ .

10) תהי  $f: [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.

הוכיחו שקיים  $c \in [0, \pi/4]$  כך ש-  $\int_0^{\pi/4} f(t) dt = f(c)$ .

11) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה.

הוכיחו שקיים  $c \in (0, 1)$  כך ש-  $f(0) + \frac{1}{2} f'(c) = f(1)$ .

12) תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.

נניח כי  $\int_a^x f(t) dt = \int_x^b f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$

הוכיחו כי  $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$ .

**13)** תהי  $f$  פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ , ונניח כי קיימות שתי נקודות,  $x_1 < x_2$ ,

$$\int_a^{x_1} f(t) dt = \int_a^{x_2} f(t) dt$$

בקטע  $(a, b)$ , שקיימים מתקיים

א. הוכיחו כי קיים  $c \in (a, b)$ , כך ש-  $f(c) = 0$ .

ב. האם הטענה שבסעיף אי נכונה גם אם לא נדרש ש-  $f$  רציפה ב- $[a, b]$ ?

ונסתפק בדרישה החלשה יותר, ש-  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ ? נמקו.

**14)** מצאו פונקציה קדומה לפונקציה  $f(x) = e^{-|x|}$ .

**15)** תהי  $f$  פונקציה אינטגרבילית בכל קטע  $[a, b]$ ,

$$\int_0^x f(t) dt$$

וనניח שלכל  $x \in \mathbb{R}$  מתקיים

הוכיחו כי  $f(x) \equiv 0$  (כלומר, לכל  $x \in \mathbb{R}$  מתקיים  $f(x) = 0$ ).

### תשובות סופיות

**1)** א. שאלת הוכחה. ב. רציפה ולא גזירה.  
 $F(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ .  
 ד. לא.

**2)** א. שאלת הוכחה. ב.  $F(x) = 0$  לכל  $x$  בקטע הנטוון. ג. רציפה וגזירה.  
 ד. לא.

**7)** א.  $C = 0$ . ב. שאלת הוכחה.

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + D + 2 & x \geq 0 \\ e^x + D & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפטי הערך המומוצע לאינטגרלים

### שאלות

**1)** בشرطן התיאוריה הוכחנו את משפט הערך המומוצע לאינטגרלים בעזרת משפט ערך הביניים של קושי.  
נסחו והוכיחו את משפט הערך המומוצע לאינטגרלים בעזרת משפט הערך המומוצע של לגראנז'.

**2)** תהי  $f$  רציפה ב- $[a, b]$ .  

$$\int_a^b f(x)dx = 1 - \int_a^b (b - a)f(x)dx$$

הוכיחו שקיימים פתרון למשוואה  $\int_a^b f(x)dx = 1$ .

**3)** תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $[a, b]$ , ונניח כי  $x_1 < x_2 \leq b$ .  

$$\int_a^{x_1} f(t)dt = \int_a^{x_2} f(t)dt$$
  
 הוכיחו שקיימים  $x$  בקטע  $(a, b)$ , שעבורו  $f(x) = 0$ .

**4)** הוכיחו, ללא חישוב האינטגרל, כי  $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{n}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

**5)** תהי  $f$  פונקציה רציפה ויורדת בקטע  $[n, n+1]$ .  

$$\int_n^{n+1} f(x)dx < f(n+1) < f(n)$$
 לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

**6)** יהיו  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות רציפות המקיימות  $f(c) = g(c)$  ש- $c \in [a, b]$ .  
 הוכיחו שקיימת נקודה  $x \in [a, b]$  כך ש-

**7)** תהי  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.  

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n)dx = f(0)$$

8) תהי  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.

$$\text{נתון כי } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

$$\text{הוכיח כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx = a$$

9) חשבו את הערך הממוצע של הפונקציה  $f(x) = \sin x \sin(x + \alpha)$  בקטע  $[0, 2\pi]$ .

10) נזכר במשפט הערך הממוצע לאינטגרלים.

תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.

$$\text{אז קיימת נקודה } c \in (a, b) \text{ כך ש- } \int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

הראו שהמשפט לעיל אינו נכון, אם נחליף את דרישת הרציפות בדרישה לאינטגרביליות.

$$11) \text{ הוכח כי } \frac{3}{\ln 2} \leq \int_2^4 \frac{x}{\ln x} dx \leq \frac{6}{\ln 2}$$

$$12) \text{ הוכח כי } \frac{\pi^2}{9} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx \leq \frac{2\pi^2}{9}$$

$$13) \text{ הוכח כי } \frac{1}{2e} \ln 2 \leq \int_0^{\pi/4} e^{-x^2} \tan x dx \leq \frac{1}{2} \ln 2$$

14) תהי  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.

$$\text{הוכח כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$$

15) נחו ווכיחו את משפט הערך הממוצע האינטגרלי השני.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

### פרק 10 - אינטגרלים לא אמיתיים

#### תוכן העניינים

1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון .....	60
2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני .....	62
3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי .....	63
4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים .....	64
5. מבחני השוואה .....	65
6. הטענסות בהחלה .....	67
7. מבחון דיריכלה .....	68
8. הטענסות בתנאי .....	69

## אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-5:

$$\int_1^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx \quad (3)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (5)$$

6) הוכחו כי  $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\alpha \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$  עבור  $|\alpha| < 1$ .

7) הוכחו כי  $\int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$  עבור  $|\alpha| > 1$ .

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2e} \quad (3)$$

(4) מתבדר :  $\infty$ .

$$\frac{5}{4e^2} \quad (5)$$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

## אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

### תשובות סופיות

- (1) מתבדר :  $\infty$ .
- (2) מתבדר :  $\infty$ .

## אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

### שאלה

1) חשבו את האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ .

### תשובה

1) מתבדר :  $\infty$ .

## שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

### שאלות

**1)** חשבו את השטח בין גرف הפונקציה  $y = e^{2x}$ , הישר  $x=1$  וציר ה- $x$  עבור  $1 \leq x$ .

**2)** חשבו את השטח בין גرف הפונקציה  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , ציר ה- $y$ , ציר ה- $x$  והישר  $x=5$ .

**3)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$ .  
 ידוע כי השטח הכלוא בין גرف הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום  $0 \leq x \leq k$ , שווה לשטח הכלוא בין גرف הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום  $x \geq k$ .  
 מצאו את הקבוע  $k$ .

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{2}e^2 \quad (1)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$k = \sqrt[3]{\ln 2} \quad (3)$$

## מבחני השוואה

### שאלות

בדקו את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5} dx \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 4x^2 + 5} dx \quad (1)$$

$$\int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^4} dx \quad (3)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} dx \quad (6)$$

$$\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2} dx \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (10)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1+x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2}-1)} dx \quad (13)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5} \sqrt{(1+x)^5}} dx \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x+\sqrt{x})} dx \quad (15)$$

**תשובות סופיות**

- 2) מתבדר.  
4) מתכנס.  
6) מתבדר.  
8) מתכנס.  
10) מתכנס.  
12) מתבדר.  
14) מתבדר.  
16) מתכנס.
- 1) מתכנס.  
3) מתכנס.  
5) מתבדר.  
7) מתכנס.  
9) מתבדר.  
11) מתכנס.  
13) מתכנס.  
15) מתכנס.

## התכנסות בהחלה

### שאלות

**בשאלות 1-3** בדקו האם האינטגרלים מתכנסים :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-10x} \sin 4x dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (3)$$

**4)** הוכיחו : אם  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  מתכנס, או  $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$  מתכנס.

### תשובות סופיות

- (1) מתכנס.
- (2) מתכנס.
- (3) מתכנס.
- (4) שאלת הוכחה.

## מבחן דיריכלה

### שאלות

הוכיחו כי האינטגרלים הבאים מתכנסים :

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 0) \text{ א.} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## התכנסות בתנאי

### שאלות

קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלה, בתנאי או מתבדרים:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) . \text{ א. } (1)$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) . \text{ ב.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) . \text{ ג.}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) . \text{ א. } (2)$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) . \text{ ב.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) . \text{ ג.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx . \text{ א. } (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x^4)}{x^p} dx . \text{ ב.}$$

$$\int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x-1}} dx . \text{ ג.}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x \sin(\tan x)}{\cos x} dx . \text{ ד.}$$

תשובות סופיות

- 1) א. מתכנס בהחלט עבור  $2 < p < 1$  ומtbodyר עבור  $2 \geq p$ .

ב. מתכנס בהחלט.

ג. מתכנס בהחלט עבור  $2 < p < 1$  ומtbodyר עבור  $2 \geq p$ .

2) א. מתכנס בהחלט.      ב. מתכנס בתנאי.      ג. מתכנס בתנאי.

3) א. מתכנס בתנאי עבור  $1 \leq p < 0$ , מתכנס בהחלט עבור  $2 < p < 1$ , מtbodyר עבור  $2 \geq p$ .

ב. מתכנס בתנאי עbor  $1 < p < -3$ , מתכנס בהחלט עbor  $5 < p < 1$ , מtbodyר עbor  $5 \geq p$ .

4) מתכנס בתנאי.

5) מתכנס בתנאי.

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

### פרק 11 - טורים עם איברים קבועים

#### תוכן העניינים

71 .....	1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים .....
74 .....	2. מבחן ההתבדרות של טורים .....
75 .....	3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים .....
77 .....	4. מבחני התכנסות לטורים כלליים .....
79 .....	5. התכנסות בהחלט והכנסות בתנאי .....
80 .....	6. תרגילי תיאוריה .....

## טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

### שאלות

#### טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-6.  
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

#### טור טלקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-11.  
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (11)$$

#### טור הרמוני מוכלל

: 12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ב.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad \text{ד.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad \text{ה.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad \text{כ.}$$

### תכונות אלגבריות של טוריים

**13)** בדקו את התכונות הטוריים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2} \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right) \quad \text{א.}$$

**14)** חבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , אם ידוע כי

**15)** מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא ...0.123123123...+0.141414...

**תשובות סופיות**

- |                                |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| (3) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$ .   | (2) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$ . | (1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$ . |
| (6) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$ . | (5) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$ . | (4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$ . |
| (9) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$ .  | (8) מתכנס ל- $-\frac{1}{2}$ .  | (7) מתכנס ל- $-\frac{1}{2}$ .  |
| ג. מתבדר.                      | ב. מתכנס.                      | א. מתכנס.                      |
| ו. מתכנס.                      | ה. מתבדר.                      | ד. מתבדר.                      |
| ג. מתבדר.                      | ב. מתבדר.                      | א. מתכנס.                      |
- $\frac{1}{12}$  (11)       $S = \frac{1}{\ln 2}$  (10)
- $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$  (14)       $\frac{323}{1221}$  (15)

## מבחן ההתבדרות של טורים

### שאלות

**1)** בדקו את התכונות הטוריים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

- |   |                                    |  |
|---|------------------------------------|--|
| $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ ג.                       | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ב.    | $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ א.                       |
| $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$ ג. | $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ ה. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2}$ ד. |

### תשובות סופיות

**1)** א-ו : מתבדר.

## מבחני התכנסות לטורים חיוביים

### שאלות

#### מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבעו אם הטור מתכנס או מתרბדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + 1} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p \leq 1) \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p > 1) \quad (4)$$

6) ענו על הסעיפים הבאים :

א. בדקו את התכנסות הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

ב. מצאו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$

#### מבחן ההשוואה ו מבחן ההשוואה הגוביי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבעו אם הטור מתכנס או מתרბדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4n + 1}{\sqrt{n^{10} + n + 1}} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 10n + 1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \sin^2 n}{n!} \quad (12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n + 2n} \quad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4 + n + 1}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2 + 1} \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{1}{n} \right) \quad (14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{n^2 + 1} - n \right) \quad (13)$$

**מבחן המנה, מבחן השורש ובחן ראנָה**

בדקו את התכונות הטוריים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n+2)} \quad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \quad (26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \quad (25)$$

**תשובות סופיות**

- |        |        |        |
|--------|--------|--------|
| (3)    | (2)    | (1)    |
| מתכנס. | מתבדר. | מתבדר. |
| (9)    | (8)    | (4)    |
| מתכנס. | מתבדר. | מתכנס. |
| (12)   | (11)   | (10)   |
| מתכנס. | מתכנס. | מתבדר. |
| (15)   | (14)   | (13)   |
| מתכנס. | מתכנס. | מתבדר. |
| (18)   | (17)   | (16)   |
| מתכנס. | מתכנס. | מתבדר. |
| (21)   | (20)   | (19)   |
| מתכנס. | מתכנס. | מתכנס. |
| (24)   | (23)   | (22)   |
| מתכנס. | מתכנס. | מתכנס. |
| (26)   | (25)   | (25)   |
| מתבדר. | מתבדר. | מתבדר. |
|        | ב.     |        |
|        | א.     |        |

## מבחני התכנסות לטורים כלליים

### מבחן ליבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 3-1 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

### מבחן דיריכלה

בשאלות 4 ו-5, קבעו אם הטור מתכנס או מתרוגס :

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{2}{16} + \dots \quad (4)$$

$$\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1} \quad (5)$$

6) הוכחו שהטורים  $\sum \sin n\theta$ ,  $\sum \cos n\theta$ , כאשר  $\theta \neq 2\pi k$ , חסומים.

7) הוכחו את התכנסות הטורים הבאים :

$$.\left(\theta \neq 2\pi k\right) \sum \frac{\sin n\theta}{n}, \quad \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \quad \sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}}$$

8) בדקו התכנסות הטור  $\sum \frac{\sin^2 n}{n}$

9) הוכחו שאם הסדרה  $b_n$  יורדת ושוואפת לאפס, אז הטור  $\sum b_n \sin n$  מתכנס.

10) ענו על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכחו שהטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (3-n)(\text{mod } 7)$  הוא טור חסום.

ב. בדקו את התכנסות הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\text{mod } 7)}{\sqrt{n+1}}$

**מבחון אבל**

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר :

$$\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}} \quad (12)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt{n+4}} \quad (11)$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2} \quad (14)$$

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(1+n^{-1})}{n} \quad (13)$$

**תשובות סופיות**

- |             |             |                |
|-------------|-------------|----------------|
| (3) מתכנס.  | (2) מתכנס.  | (1) מתכנס.     |
| (6) הוכחה.  | (5) מתכנס.  | (4) מתכנס.     |
| (9) הוכחה.  | (8) מותבדר. | (7) הוכחה.     |
| (11) מתכנס. | ב. מתכנס.   | (10) א. הוכחה. |
| (14) מתכנס. | (13) מתכנס. | (12) מתכנס.    |

## התכנסות בהחלה והתכנסות בתנאי

### שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלה, מתכנס בתנאי או מתבדר :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( -\frac{1}{\ln n} \right)^n \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7)$$

### תשובות סופיות

- |                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| 1) מתבדר.       | 2) מתכנס בתנאי. |
| 3) מתכנס בתנאי. | 4) מתכנס בהחלה. |
| 5) מתכנס בהחלה. | 6) מתכנס בתנאי. |
| 7) מתכנס בתנאי. | 8) מתכנס בתנאי. |

## תרגילי תיאוריה

**1)** להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם  $\sum a_n$  מתכנס ו-  $\sum b_n$  מתבדר, אז  $(\sum a_n + b_n)$  מתבדר.

ב. אם  $\sum a_n$  מתבדר ו-  $\sum b_n$  מתכנס, אז  $(\sum a_n + b_n)$  מתבדר.

**2)** להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם  $\sum a_n^2$  מתכנס, אז  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט.

ב. אם  $\sum a_n$  חיובי ומתכנס, אז  $\sum \frac{1}{a_n}$  מתבדר.

ג. אם  $\sum a_n^2$  מתכנס, אז  $\sum a_n$  מתכנס.

**3)** הוכחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$  מתבדר.

**4)** הוכחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  חיובי ומתכנס, אז גם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

**5)** נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכחו כי  $\sum \left( 1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n} \right)$  מתכנס.

**6)** א. נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .

הוכחו כי  $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס  $\sum a_n$ .

הוכחו ש-  $\sum |a_n|$  מתבדר אם  $\sum a_n^2$  מתבדר.

הערה: אין קשר בין השעיפים

**7)** תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכחו כי  $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$  מתכנס.

8) הוא טור אי-שלילי ומתכנס.  $\sum a_n$

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$  מתכנס.

9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה  $(a_n)_{n \geq 1}$  מקיימת  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$  לכל  $n$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  מתכנס.

10) נניח כי  $a_n \geq 0$ .

הוכיחו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

11) הוכיחו או הפריכו:

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  מתכנס והסדרה  $b_n$  חסומה, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

12) הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$  מתכנס בתנאי, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתבדר.

13) הוכיחו או הפריכו:

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס בתנאי.

14) נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .  
הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  לכל  $n$ , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  לכל  $n$ , אז הטור מתבדר.

15) נתון טור חיובי ומוגדר  $\sum a_n$ .  
הוכיחו כי  $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$  מתכנס.

**16)** נתונים שני טורים חיוביים  $\sum a_n, \sum b_n$ .

א. נתון שהטורים  $\sum a_n^2, \sum b_n^2$  מתכנסים.

הוכחו כי  $\sum a_n b_n$  מתכנס.

ב. הוכחו כי  $\sum (a_n + b_n)^2$  מתכנס.

ג. נתון טור חיובי ומתקנס  $\sum a_n$ .

הוכחו כי  $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$  מתכנס.

**17)** הוכחו :

א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$ , אז הטור מתבדר.

ב. אם  $\sum a_n$  חיובי ואם  $\sum (na_n - k)$  מתכנס (כאשר  $k \neq 0$ ), אז  $\sum a_n$  מתבדר.

**18)** הוכחו כי אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$ , אז הטור מתכנס.

**19)** נתון  $a_n \geq 0$  לכל  $n$ .

א. נתון כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$ .

הוכחו כי  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  מתכנס.

ב. נתון כי  $\sum (n^3 a_n^2 - k)$  מתכנס (כאשר  $k > 0$ ).

הוכחו כי  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  מתכנס.

**20)** הסדרה  $(a_n)$  מוגדרת על ידי  $a_1 = \frac{21}{20}, a_2 = -\frac{1}{2}, a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ , כאשר  $(n \geq 1)$

האם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס?

$$\text{21) הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מוגדר כך: } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$$

הוכיחו כי הטור מתכנס.

22) נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ ,

ונתנו כי לכל  $n$  מתקיים  $a_{n+1} \leq a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum n(a_n - a_{n+1})$  מתכנס.

23) נתון  $\forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1-a_{n+1}) > 1$ .

האם  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1)$  מתכנס?

24) נניח כי  $(a_n)$  סדרה המקיים  $a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1} < 0$  לכל  $n$  טבעי.

הוכיחו כי  $\sum a_n$  מתבדר.

25) ( $a_n$ ) היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.

הוכיחו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  מתבדר.

26) נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

27) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הסדרה  $a_n$  מתכנסת אם ורק אם  $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$  מתכנס.

ב. בדקו האם הסדרה  $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$  מתכנסת.

ג. בדקו האם הסדרה  $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא טורי מקולון עם שארית לגרנץ'.

28) פונקציה  $f$  מוגדרת לכל  $x$ , גזירה ב- 0 ומקיימת  $f(0) = 0$ . הוכיחו כי אם  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט, אז  $\sum f(a_n)$  מתכנס בהחלט.

29) נתון  $p(x)$  פולינום. הוכיחו כי  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט אם ורק אם  $p(0) = 0 \Leftrightarrow \sum P(a_n)$  מתכנס.

30) יהיו  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  טוריים חיוביים. נתון כי:

(1) הטור  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$  מתכנס. (2) לטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  טבעי.

הוכיחו כי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

### פרק 12 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטוריות חזקות

#### תוכן העניינים

85 .....	1. סדרות פונקציות .....
88 .....	2. טורי פונקציות .....
90 .....	3. טורי חזקות .....

## סדרות פונקציות

### שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבסעיפים 1-11:

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

$$\cdot (0,1) \text{ ב-} f_n(x) = x^n \quad (2) \quad \cdot [0,0.5] \text{ ב-} f_n(x) = x^n \quad (1)$$

$$\cdot [0,1] \text{ ב-} f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad (4) \quad \cdot (0,\infty) \text{ ב-} f_n(x) = \arctan(nx) \quad (3)$$

$$\cdot [0.5,4] \text{ ב-} f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad (6) \quad \cdot [0,1] \text{ ב-} f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad (5)$$

$$\cdot \mathbb{R} \text{ ב-} f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad (8) \quad \cdot \mathbb{R} \text{ ב-} f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n} \quad (7)$$

$$\cdot [0,1] \text{ ב-} f_n(x) = n(1-x)x^n \quad (10) \quad \cdot \mathbb{R} \text{ ב-} f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+x^2+n^2} \quad (9)$$

$$\cdot [0,1] \text{ ב-} f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1)+1 & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{12) נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית ב-  $[0, 4]$  ?  
 ב. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[0, 4]$  ?  
 ג. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית על הישר המשמי?  
 ד. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה על הישר המשמי?

$$\text{13) נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = nx e^{-n^2 x^2}$$

- א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע  $[0, \infty)$  ?  
 ב. האם הסדרה מתכנסת במיש בקטע  $[0, \infty)$  ?  
 ג. האם הסדרה מתכנסת במיש בקטע  $[1, \infty)$  ?

$$\text{14) נתונה } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[ n, n + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית על הישר המשמי?  
 ב. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה על הישר המשמי?

$$\text{15) נגדיר את סדרת הפונקציות } f_n(x) = \left[ 1 - \chi_n(x) \right] \left( x + \frac{1}{n} \right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x)$$

$$\cdot \chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left( n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2} \right) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ כאשר}$$

- א. מהם ערכי הפרמטר  $\alpha$ , עבורם סדרת הפונקציות  $(f_n(x))$   
 מתכנסת נקודתית ב-  $[1, \infty)$  ?  
 אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?  
 ב. מהם ערכי הפרמטר  $\alpha$ , עבורם סדרת הפונקציות  $(f_n(x))$   
 מתכנסת במידה שווה ב-  $(\infty, 1]$  ?

### תשובות סופיות

- 1)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ .  
**ב.** מתכנסת במידה שווה.
- 2)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ .  
**ב.** אינה מתכנסת במידה שווה.
- 3)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \frac{\pi}{2}$ .  
**ב.** אינה מתכנסת במידה שווה.
- 4)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ .  
**ב.** לא במידה שווה.
- 5)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ .  
**ב.** אינה מתכנסת במידה שווה.
- 6)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 0 & 0.5 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x=1 \\ 1 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$ .  
**ב.** לא במידה שווה.
- 7)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ .  
**ב.** מתכנסת במידה שווה.
- 8)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \sqrt{x^2}$ .  
**ב.** מתכנסת במידה שווה.
- 9)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ .  
**ב.** מתכנסת במידה שווה.
- 10)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ .  
**ב.** אינה מתכנסת במידה שווה.
- 11)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$ .  
**ב.** מתכנסת במידה שווה.
- 12)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ .  
**ג.** מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ .  
**ד.** אינה מתכנסת במידה שווה.
- 13)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ .  
**ב.** לא במידה שווה. ג. כן.
- 14)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ .  
**ב.** אינה מתכנסת במידה שווה.
- 15)** א. לכל ערך של  $\alpha$  ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום  $(1, \infty]$ , לפונקציה  $\frac{1}{x}$ .  
**ב.** רק אם  $\alpha < 0$ .

## טורר פונקציות

### שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-6:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot [\ln(nx)]^4} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5)$$

בדקו התחום הטעון שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם:

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (7)$$

$$(-1 \leq x \leq 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (9)$$

$$\left( \frac{1}{4} \leq x \leq 4 \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (10)$$

$$(-a \leq x \leq a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (11)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7 x^2} \quad (12)$$

**תשובות סופיות**

$x > 0$  **(1)**

$x \neq 5$  **(2)**

$x < 3\frac{9}{10}$  or  $4\frac{1}{10}$  **(3)**

$0 < x \neq \frac{1}{n}$  **(4)**

$x > 0$  **(5)**

$x \neq 0, -1, -2, -3, \dots$  **(6)**

**(7)** מתכנס במידה שווה.**(8)** מתכנס במידה שווה.**(9)** מתכנס במידה שווה.**(10)** מתכנס במידה שווה.**(11)** מתכנס במידה שווה.**(12)** מתכנס במידה שווה.

## טוריות חזקות

### שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-12:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n \quad (10)$$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות:

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (15)$$

$$f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (14)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (20)$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (19)$$

### הערות חשובות

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות נמצא בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתורן תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

**תשובות סופיות**

$$-\infty < x < \infty, R = \infty \quad \text{(2)}$$

$$-1 \leq x < 1, R = 1 \quad \text{(1)}$$

$$-1 \leq x \leq 1, R = 1 \quad \text{(4)}$$

$$-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2 \quad \text{(3)}$$

$$-1 < x < 1, R = 1 \quad \text{(6)}$$

$$-3 < x \leq -1, R = 1 \quad \text{(5)}$$

$$-\infty < x < \infty, R = \infty \quad \text{(8)}$$

$$x = 1, R = 0 \quad \text{(7)}$$

$$-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3 \quad \text{(10)}$$

$$-5 < x \leq 3, R = 4 \quad \text{(9)}$$

$$-7 < x < -3, R = 2 \quad \text{(12)}$$

$$-9 \leq x \leq 11, R = 10 \quad \text{(11)}$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad \text{(14)}$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{(13)}$$

$$(|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad \text{(16)}$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad \text{(15)}$$

$$(|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad \text{(18)}$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad \text{(17)}$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad \text{(20)}$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad \text{(19)}$$

# חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 13 - טורי טיילור - מקלורן

### תוכן העניינים

92 .....	1. טור טיילור וטור מקלורן .....
94 .....	2. טור טיילור סביב $X=0$ .....
95 .....	3. חישוב סכום של טור .....
96 .....	4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן .....
97 .....	5. חישובים מקורבים עם השארית של לייבנץ .....
99 .....	6. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים .....
100 .....	7. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז' .....
106 .....	8. נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות .....

## טור טיילור וטור מקלורו

### שאלות

בשאלות 1-24 מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביבה  $x = 0$  (טור מקלורו) :

$$f(x) = \sinh x \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2)$$

$$f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6)$$

$$f(x) = \cos^2 x \quad (5)$$

$$f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9)$$

$$f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8)$$

$$f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15)$$

$$f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (20)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan \left( \frac{x}{3} \right) \quad (24)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, יש להזכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.

לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24 יש להזכיר את הנושא גזירה וaintגרציה של טורי מקלורו.

אפשר להיעזר בפתרונות הידועים לטור מקלורו המופיעים בספר.

בשאלות 25-27 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורו של הפונקציות (נדרש ידוע ככפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27)$$

$$f(x) = \tan x \quad (26)$$

$$f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

### תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(-1 \leq x < 1) \quad \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10)$$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9) \quad (-1 < x < 1)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14)$$

$$(|x| < 5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (16)$$

$$(|x| < 3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20)$$

$$(-1 < x \leq 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \quad \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26)$$

$$1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{25}{24} x^4 - \frac{331}{720} x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x^5 + \dots \quad (27)$$

## טור טיילור סביב $x = x_0$

### שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב  $x_0 = x$  של הפונקציות הבאות:

$$(x_0 = 1) \quad f(x) = \ln x \quad (1)$$

$$(x_0 = 2) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\left( x_0 = \frac{\pi}{2} \right) \quad f(x) = \sin x \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1) \\ (0 < x \leq 2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (2) \\ (0 < x < 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (3) \\ (-\infty < x < \infty)$$

## чисוב סכום של טור

### שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$\pi/4 \quad (5)$

$2e \quad (4)$

$\sqrt{e} \quad (3)$

$e^{-2} \quad (2)$

$e \quad (1)$

$\ln \frac{3}{2} \quad (9)$

$\ln 2 \quad (8)$

$\cos 1 \quad (7)$

$\sin 1 \quad (6)$

## чисוב גבולות בעזרת טורי מקלורו

### שאלות

**בשאלות 1-3** חשבו את ערך הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

$$(4) \text{ נתון כי } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{x^2} - 1}{x^n} = k \text{ כאשר } k \text{ קבוע שונה מאפס.}  
מצאו את } n \text{ ואת } k.$$

$$(5) \text{ חשבו את הגבול } . \lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}$$

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{120} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$k = 1, n = 3 \quad (4)$$

$$1 \quad (5)$$

## чисובים מקורבים עם השארית של ליבנץ

### שאלות

**בשאלות 1-3** חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001:

$$\arctan 0.25 \quad (3)$$

$$\sin 3^\circ \quad (2)$$

$$\frac{1}{e} \quad (1)$$

**בשאלות 4-6** חשבו בעזרת  $n$  איברים ראשוניים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

$$(n=4) \ln 1.5 \quad (6)$$

$$(n=1) \cos 4^\circ \quad (5)$$

$$(n=3) \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (4)$$

7) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$  עבור  $|x| \leq \frac{\pi}{6}$ ?

8) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב  $x \approx \ln(1+x)$  עבור  $|x| < 0.01$ ?

9) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב  $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$  עבור  $|x| \leq 0.2$ ?

10) עברו אילו ערכי  $x$ , כך שהשגיאה הקטנה מ-0.001 מינימלית?

11) עברו אילו ערכי  $x$ , כך שהשגיאה הקטנה מ-0.01 מינימלית?

### תשובות סופיות

$$\frac{53}{144} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{60} \quad (2)$$

$$\frac{47}{192} \quad (3)$$

$$\frac{1}{48}, \text{ בשגיאת הקטנה מ- } \frac{5}{8} \quad (4)$$

$$\frac{\pi \cdot \pi}{4050}, \text{ בשגיאת הקטנה מ- } 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{160}, \text{ בשגיאת הקטנה מ- } \frac{77}{192} \quad (6)$$

$$\frac{(\pi/6)^5}{5!} \quad (7)$$

$$\frac{(0.01)^2}{2} \quad (8)$$

$$\frac{(0.2)^6}{6!} \quad (9)$$

$$|x| < \sqrt[5]{3/25} \quad (10)$$

$$|x| < \sqrt[9]{9/100} \quad (11)$$

## чисוב מוקרוב של אינטגרל מסוים

### שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- $\varepsilon$ :

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \quad \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{449}{2250} \quad (1)$$

$$\frac{39}{400} \quad (2)$$

$$\frac{143}{576} \quad (3)$$

## чисובים מוקרבים עם השארית של לגראנץ'

1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה  $f(x) = \sqrt{x+4}$  סביב 0,  $x_0 = 0$ , כולל שארית לגראנץ'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את  $\sqrt{5}$  והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכחו שלכל  $0 < x$  מתקיים :

$$2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 < \sqrt{x+4} < 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{512}x^3$$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב ?  $|x| < 0.1$

2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$  סביב 0,  $x_0 = 0$ , כולל שארית לגראנץ'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את  $\sqrt[3]{66}$  והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכחו שלכל  $0 < x$  מתקיים :

$$4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 < \sqrt[3]{64+x} < 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{5308416}x^3$$

3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה  $f(x) = \tan x$  סביב 0,  $x_0 = 0$ , כולל שארית לגראנץ'.

חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את  $\tan 0.1$  והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכחו שלכל  $1 < x < 0$  מתקיים :

$$x < \tan x < x + 4\sqrt{3}x^2$$

4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה  $f(x) = \sqrt[4]{x}$  סביב 16,  $x_0 = 16$ , כולל שארית לגראנץ'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את  $\sqrt[4]{15}$  והעריכו את השגיאה בקירוב.

5) חשבו את  $\sqrt[3]{29}$  ברמת דיוק של  $10^{-3}$ .

6) חשבו את  $\sin 36^\circ$  בשגיאה הקטנה מ-  $\frac{1}{1000000}$ , בשתי דרכים :

א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב  $x = 0$ .

ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב  $x = \frac{\pi}{4}$ .

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את  $\sin 36^\circ$ ? נמקו.

$$7) \text{ נתונה } f(x) = \sqrt{1+x}.$$

- א. קרבו את  $f(x)$  על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור  $1 \leq x \leq 0$ , והעריכו את השגיאה בקירוב.

$$\text{ב. הוכחו שלכל } 0 \geq x \text{ מתקיים } x \leq \sqrt{1+x}.$$

$$8) \text{ נתונה } f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

- א. קרבו את  $f(x)$  על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3 עבור  $0.9 \leq x \leq 0.1$ , והעריכו את השגיאה בקירוב.
- ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

$$0.1 \leq x \leq 0.9, \frac{1}{1+x} \approx 1-x+x^2-x^3$$

$$\text{ג. הוכחו כי עבור } x < -1 \text{ מתקיים } \frac{1}{1+x} \geq 1-x+x^2-x^3.$$

$$9) \text{ נתונה } f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

- א. קרבו את  $f(x)$  על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור  $|x| \leq 0.5$ , והעריכו את השגיאה בקירוב.

- ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

$$|x| \leq 0.5, \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$$

$$\text{ג. פתרו את אי השוויון } \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} < 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2, \text{ עבור } -1 < x < 0.$$

10) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מצאו את נוסחת מקלוון עבור  $f(x) = e^x$ , כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

$$\text{ב. חשבו את } \sqrt[e]{e} \text{ ברמת דיוק של } 10^{-4}.$$

- ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$$0 \leq x \leq 1, e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

- ד. מצאו פולינום  $p(x)$  בקטע  $(-1, 1)$ , שבעירוי  $|e^x - p(x)| < 10^{-5}$ .

**11)** ענו על הסעיפים הבאים :

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור  $f(x) = \ln(1+x)$ , כולל נוסחת השארית של גראנז'.

ב. חשבו את  $\ln 1.5$  ברמת דיוק של  $10^{-4}$ .

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת :

$$\ln(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

ד. מצאו פולינום  $p(x)$  בקטע  $(0,1)$ , שבעורו  $|\ln(1+x) - p(x)| < 10^{-2}$

ה. הוכחו כי לכל  $0 < x$  מתקיים אי השוויון  $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} < \ln(1+x) < x$ .

**12)** תהי  $f$  פונקציה גזירה פעמיים בקטע  $[0,1]$ ,

ונניח ש-  $f(0) = f(1)$  ו-  $|f''(x)| \leq M$  לכל  $0 < x < 1$ .

$$\text{הוכחו כי } |f'(x)| \leq \frac{M}{2} \text{ לכל } 0 \leq x \leq 1.$$

**13)** תהי  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$  פונקציה גזירה פעמיים המקיים  $f(-1) = f(1) = 0$ .

כמו כן, נתון כי קיימים  $M$ , כך ש-  $|f''(x)| \leq M$  בקטע.

$$\text{הוכחו שלכל } -1 \leq x \leq 1 \text{ מתקיים } |f(x)| \leq \frac{M}{2}.$$

**14)** תהי  $f$  פונקציה גזירה ב-  $(0, \infty)$ , ונניח כי  $M$  לכל  $x < 0$ .

$$\text{הוכחו כי } 0 < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} < \infty.$$

**15)** תהי  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה פעמיים המקיים  $f''(x) \geq 0$  לכל  $x \in [a,b]$ .

ונניח כי  $x_0 \in [a,b]$ .

א. הוכחו שלכל  $x \in [a,b]$  מתקיים  $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

ב. הוכחו כי  $\cos x - \cos y \geq (x - y) \sin(\frac{x+y}{2})$  לכל  $x, y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ .

**16)** תהי  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \quad M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|, \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$$

$$\text{הוכחו כי } (M_1)^2 \leq 2M_0 M_2.$$

17) נתנו ש-  $f$  גזירה פעמיה ב-  $(0, \infty)$  ו-  $f''$  חסומה ב-  $(0, \infty)$ .  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

### תשובות סופיות

**1)** א. נוסחה :  $\sqrt[3]{64+x} = 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{81\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$

חישוב :  $\cdot \frac{5}{663552}, \sqrt[3]{66} = 4 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2304} = \frac{9311}{2304}$

ב. שאלת הוכחה.  $\frac{1}{480000}.$  ג.

**2)** א. נוסחה :  $\tan 0.1 = \frac{1}{10}, \tan x = x + \frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$ , שגיאה בקירוב :

ב. שאלת הוכחה.

**3)** א. נוסחה :  $\sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 - \frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$

חישוב :  $\cdot \frac{1}{512} : \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64}$

ב. שאלת הוכחה.

**4)** נוסחה :  $\sqrt[4]{x} = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + \frac{7}{128\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$

חישוב :  $\cdot \frac{1}{3130}, \sqrt[4]{15} = 2 - \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} = \frac{8061}{4096}$

**5)**  $\sqrt[3]{29} = 3 \frac{158}{2187}$

$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^3.$  ב.  $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - \frac{\frac{\pi^3}{5^3}}{3!} + \frac{\frac{\pi^5}{5^5}}{5!} - \frac{\frac{\pi^7}{5^7}}{7!}.$  א. **6)**

ב. שגיאה הקטנה מ- 0.25. **7)** א.  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$

א.  $\cdot \frac{6561}{10000} \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$  בשגיאת הקטנה מ-

ב. שגיאת הקטנה מ-. ג. שאלת הוכחה.  $\frac{6561}{10000}$

א.  $\cdot \frac{7}{27} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$  בשגיאת הקטנה מ-

ב. השגיאת המקסימלית היא  $\frac{7}{27}$ . ג. ראו בסרטון.

**10)** א.  $\sqrt{e} = 1.6487$  ב.  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$

ג.  $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}$  ד.  $\frac{3}{(n+1)!}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1} . \quad \text{א. (11)}$$

$$\ln(1.5) = 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} + \frac{0.5^5}{5} - \frac{0.5^6}{6} + \frac{0.5^7}{7} - \frac{0.5^8}{8} + \frac{0.5^9}{9} . \quad \text{ב.}$$

$$p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102} . \quad \text{ג. שאלת הוכחה.}$$

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

### הערה לגבי קירובים

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא מדויק ל-  $n$  ספרות אחרי הנקודה, אז علينا לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ-  $0.5 \times 10^{-n}$ .  
 למשל, דיקוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעתו, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ-  $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$ .  
 בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקרים מסוימים נעשה בו שימוש.

## נוסחאות – טורי מקלורו של פונקציות חשובות

### טור מקלורו

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

### תחום התכנסות

$$-\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$-1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$$

$$-1 < x < 1$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$-1 \leq x \leq 1 \ (m > 0)$$

$$-1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0)$$

$$-1 < x < 1 \ (m \leq -1)$$

$$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$$

# חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 14 - משוואות מסדר ראשון

### תוכן העניינים

1. מבוא .....	(ללא ספר) .....
2. הפרדת משתנים.....	107 .....
3. משוואה הומוגנית.....	109 .....
4. משוואה לינארית מסדר ראשון .....	111 .....
5. משוואת ברנולי .....	113 .....
6. משפט הקיום והיחidot על שם פיאנו ופיקارد .....	114 .....
7. פתרונות גרפיים ונוומיים למשוואת מסדר ראשון .....	117 .....
8. משוואות מסדר ראשון ומעלה גבוהה .....	119 .....

## הפרדת משתנים

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2)=1 \quad ; \quad (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1)=-1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi)=1 \quad ; \quad y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0)=5 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0)=1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

### תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x|-c}, \quad y=0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t+c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

## משואה הומוגנית

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-8 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xyy' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left( x - y \cos \frac{y}{x} \right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left( y + \sqrt{x^2 + y^2} \right)dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $n$ , על מנת שהמשואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשואה עבור הערך של  $n$  שנמצא בסעיף א.

### תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln \left| 2 \left( \frac{y}{x} \right)^3 + 1 \right| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln \left| \left( \frac{y}{x} \right) - 1 \right| - \frac{5}{4} \ln \left| \left( \frac{y}{x} \right) + 3 \right| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln \left| \left( \frac{y}{x} \right) - \left( \frac{y}{x} \right) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln \left| 2 \left( \frac{y}{x} \right)^2 + 4 \right| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin \left( \frac{y}{x} \right) + c \quad (5)$$

$$\ln \left( 1 + e^{\left( \frac{x}{y} \right)^2} \right) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1} \left( \frac{x}{y} \right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln \left| \left( \frac{x}{t} \right) - \left( \frac{x}{t} \right)^2 \right| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln \left( 1 + 2 \left( \frac{y}{x} \right)^2 \right) + c \quad (9)$$

## משוואות ליניאריות מסדר ראשון

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3y' + (2 - 3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

### תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[ \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) [x^2 - 4x + C] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2(y+c) \quad (9)$$

## משוואת ברנולי

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; \quad y' - \left( \frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$(\sin x \neq 0) \quad z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left( \frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

## משפט הקיום והיחidot על שם פיאנו ופיקארד

### שאלות

1) נתונה הבעיה  $y(2) = -1$ ,  $y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$

א. הוכחו ש-  $y_1(x) = -x + 1$ ,  $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 + y$  הם פתרונות לבעיה.

קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיומם שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

2) נתונה הבעיה  $y(0) = 0$ ,  $y' = \sqrt[3]{y} + 4$ .

א. הוכחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכחו שלבעיה קיימים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

3) פתרו את הבעיה  $y(4) = 0$ ,  $y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$

4) נתונה הבעיה  $y(0) = 4$ ,  $y' = (y-1)(x^2 + y)^5$ .

א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

5) נתונה המד"ר  $dy = (2x + y^3)dx$ .

א. הראו שעבור  $(y = x)$  המד"ר ליניארית מסדר ראשון,

ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,

מהן נקודות ההתחלה  $(x_0, y_0)$ , כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,

העובד דרך  $(x_0, y_0)$ .

צטוו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.

מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך  $(x_0, y_0)$ ?

6) נתונה בעיית ההתחלה  $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$

א. מצאו 3 קירובי פיקارد לפתרון הבעה.

ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר  $n$  (הוכחו באינדוקציה).

ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר  $n$  מתכנס לפתרון כאשר  $\infty \rightarrow n$ .

7) כמה פתרונות יש בעיית ההתחלה  $\begin{cases} y' = \frac{1}{x} |\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases}$

8) נתונה בעיית התחליה  $\begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיימים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

9) נתונה בעיית התחליה  $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיימים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

10) הראו כי לבעיה  $\begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  יש פתרון יחיד על כל הישר המשני.

11) הראו כי לבעיה  $\begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  יש פתרון יחיד על כל הישר המשני.

12) הראו כי לבעיה  $\begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  יש פתרון יחיד על כל הישר המשני.

### תשובות סופיות

- ב. שאלת הסבר.  
ג. שאלת הוכחה.
- ב. שאלת הוכחה.  
ג. שאלת הוכחה.
- $y(x) = 0$
- ב. שאלת הוכחה.  
א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.
- ב. כל נקודת התחליה  $(x_0, y_0)$ , שverbora  $\neq 0$ .
- הקטע הארוך ביותר:  $(0, \infty)$  או  $(-\infty, 0)$ .
- $y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 + x^2, \quad y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}, \quad y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$ .  
א.  $y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$
- ב.  $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ .  
א. אחד.
- ב.  $[0, 1]$ .  
ג. הוכחה.
- ב.  $[-0.1, 0.1]$ .  
ג. הוכחה.
- א.  $[-0.08, 0.08]$ .
- ב.  $[-0.5, 0.5]$ .  
ג. הוכחה.
- א.  $\left[ -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]$ .
- ב.  $(10)$  הוכחה.  
 $(11)$  הוכחה.  
 $(12)$  הוכחה.

## פתרונות גרפים ונומריים למשואה מסדר ראשון

### שאלות

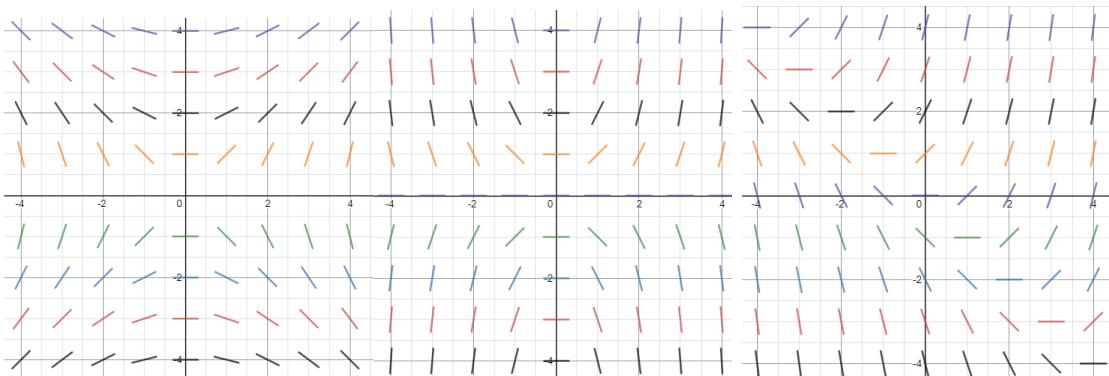
1) שרטטו שדה כיוונים למשואה הדיפרנציאלית  $y' = 2y - x$ .

2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א-ג' לשדה הכוונים שלה:

א.  $y' = \frac{x}{y}$

ב.  $y' = xy$

ג.  $y' = x + y$



איור 3

איור 2

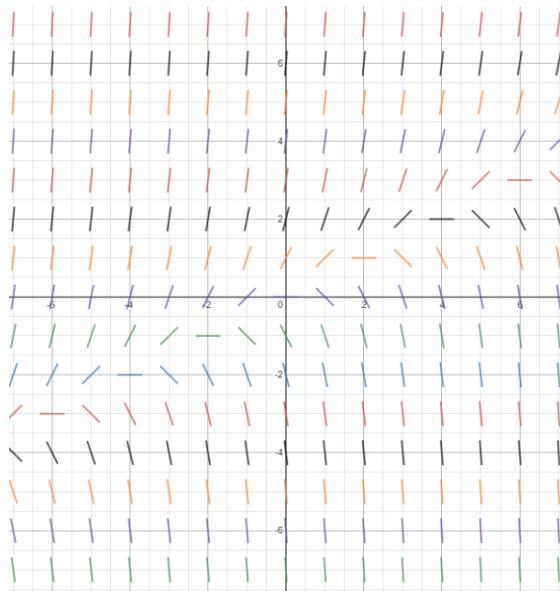
איור 1

3) נתונה המד"ר  $y' = y - x$ ,  $y(0) = 2$

מצאו בקירוב את  $y(1)$  בעזרת שיטת אוילר עם  $h = 0.1$ .

4) נתונה המד"ר  $y' = x + y$ ,  $y(1) = 2$

מצאו בקירוב את  $y(2)$  בעזרת שיטת אוילר עם  $h = 0.2$ .

**תשובות סופיות****(1)****(2)** איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

$$y(1) = 4.593 \quad \text{(3)}$$

$$y(2) = 6.95328 \quad \text{(4)}$$

## משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

**הערה:** נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

**הערת סימונו:** בתת-פרק זה נסמן  $p = y'$

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$(p = y') \quad 4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (1)$$

$$(p = y') \quad x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (2)$$

$$(p = y') \quad xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (3)$$

$$(p = y') \quad y = 2px + p^4 x^2 \quad (4)$$

$$(p = y') \quad xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (5)$$

$$(p = y') \quad (y > 0) \quad 6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (6)$$

### תשובות סופיות

$$\left( y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1 \right) \cdot \left( \ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0 \quad (1)$$

$$(\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0 \quad (2)$$

$$\left( y + 0.5x - \frac{c_1}{x} \right) \cdot \left( \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2 \right) = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

$$y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2 \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (5)$$

$$6 \left( \frac{c}{y^2} \right)^2 y^2 + 3 \left( \frac{c}{y^2} \right) x - y = 0 \quad (6)$$

# חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 15 - משוואות לינאריות מסדר שני

### תוכן העניינים

1. משואה חסраה - שיטת הורדת סדר המשואה.	121
2. משואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים.	123
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחס המושכל"	125
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם".	127
5. וריאציות פרמטרים.	129
6. הoorונסקיון ושימושו.	130
7. משואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משואה אוילר (ללא ספר)	132
8. משואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל.	132
9. משפט הקיום והיחיון לסדר לינארית מסדר שני.	133
10. השיטה האופרטורית.	134

## משואה חסירה – שיטת הורדת סדר המשווהה

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$(x \neq 0) \quad x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y'' \tan x - 1 = y' \quad (2)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (4)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (5)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (6)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (7)$$

$$(\cos y \neq 0) \quad y'' \tan y = 2(y')^2 \quad (8)$$

### תשובות סופיות

$$y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (1)$$

$$y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \quad (2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2; y = \pm x + C_3 \quad (3)$$

$$y = C_1 (x \ln x - x) + C_2; y = C_3 \quad (4)$$

$$y = e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + k ; y = c \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{c} \left[ \frac{c^2 (x+k)^4}{4} + 1 \right] \quad (7)$$

$$\cot y = - (cx + k) ; y = c \quad (8)$$

## משואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-11:

$$y'' - 100y = 0 \quad (1)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (3)$$

$$z(0) = 1, z'(0) = 1, 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (4)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (5)$$

$$4\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4\frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (6)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 10y' + 125y = 0 \quad (8)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 3; y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{1}{a^2}y(x) = 0 & (a > 0) \\ y(0) = 4 \\ y(\infty) = y(-\infty) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

- .  $yy'' + (y')^2 = 0$
- א. הראו כי  $y_1 = \sqrt{x}$  ו-  $y_2 = 4$  הם פתרונות של המד"ר.
- ב. הראו כי הפתרון  $(x) = y_1(x) + y_2(x)$ , אינו פתרון של המד"ר.  
האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

### תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x} \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{4x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{7x} \quad (3)$$

$$z = e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (5)$$

$$x(t) = c_1 e^{\frac{-t}{2}} + c_2 t e^{\frac{-t}{2}} \quad (6)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad (7)$$

$$y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x] \quad (8)$$

$$y = e^2 \sin 3x \quad (9)$$

$$y = e^{\frac{-4x}{5}} \left[ c_1 \cos \left( \frac{2}{5}x \right) + c_2 \sin \left( \frac{2}{5}x \right) \right] \quad (10)$$

$$y = 4e^{-\frac{|x|}{a}} \quad (11)$$

**(12) שאלת הוכחה.**

## השווואת מקדים בשיטת "הניחוש המושכל"

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (7)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (8)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (9)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (10)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

### תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (9)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (10)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## השווואת מקדמים בשיטת "המרשם"

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (8)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (9)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (10)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

### תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (7)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (9)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (10)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## וリアציות פרמטרים

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (2)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 \quad ; \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (5)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (6)$$

### תשובות סופיות

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x| \quad (1)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[ \ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-2x} [\ln x - 1] \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[ \frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} \left[ 2(x+1)^{3/2} \right] \quad (3)$$

$$y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0) \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1 + e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1 + e^{-x}) - (1 + e^{-x})] \quad (5)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x \quad (6)$$

## הוורונסקיין ו שימושיו

### שאלות

**1)** האם ניתן כי  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = \sin x$ , הם שני פתרונות של המשוואה  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ , עם מקדמים רציפים בקטע  $[0, \pi]$ ?

**2)** הראו כי הפונקציות  $y_1(x) = \sin x^2$ ,  $y_2(x) = \cos x^2$  הן פתרונות בת"ל של המשוואה  $y''' - 4x^3y = 0$ , בקטע  $(-\infty, \infty)$ .  
חשבו את הוורונסקיין של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור  $x = 0$ .  
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?

**3)** בדיקה ישירה מראה שהפונקציות  $y_1(x) = xe^x$ ,  $y_2(x) = e^{-x}$  הן פתרונות של המשוואה  $y'' - \frac{2}{1+2x}y' - \frac{2x+3}{1+2x}y = 0$ , בקטע  $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ .  
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?

**4)** נתונות שתי פונקציות  $y_1 = x^3$ ,  $y_2 = |x^3|$ , בקטע  $[-4, 4]$ .  
א. חשבו את הוורונסקיין של הפונקציות בקטע.  
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות ליניארית בקטע.  
ג. האם ניתן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלות מקדמים רציפים?  
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר  $xy'' - 2y' = 0$ .  
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?

**5)** ענו על הסעיפים הבאים:  
א. יהיו  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  פונקציות גזירות פעמיים בקטע  $I$ , ונניח כי הוורונסקיין שלהם שונה מאפס ב-  $I$ .  
הוכיחו כי קיימת משווהה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש-  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  הם פתרונות שלה.  
ב. רשמו משווהה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע  $0 < x < x_0$ , שהפונקציות  $y_1(x) = x^2$ ,  $y_2(x) = x^4$  הן פתרונות שלה.

- 6) נתון כי  $y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0$ ,  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_1(c) = y_2(c) = 0$  רציפות בקטע  $I$ .  
 הראו כי אם קיימת נקודה  $c$  בקטע  $I$ , שverbora  $y_1'(c) = y_2'(c) = 0$   
 אז  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

### תשובות סופיות

- (1) לא.  
 (2)  $W = -2x$   
 (3) כן.  
 (4) א.  $W = 0$ .      ב. שאלת בדיקה.  
 (5) א. שאלת הוכחה.      ב.  $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 0$   
 (6) שאלת הוכחה.

## משואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

### שאלות

1) פתרו  $y_1(x) = e^{2x}$ ,  $y'' + \tan x \cdot y' - (2 \tan x + 4)y = 0$

2) פתרו  $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ .

3) הסבירו את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד"ר:

$$(0 < x < 1), \quad (1-x)y'' + x \cdot y' - y = 2(1-x)^2 e^{-x},$$

כאשר ידוע ש-  $y_1(x) = e^x$ , פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

### תשובות סופיות

1)  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} (\sin x - 4 \cos x)$

2)  $y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1)$

3) שאלת הדגמה.

## משפט הקיום והיחידות לינארית מסדר שני

### שאלות

1) נתונה המשוואה  $x^2y'' - 4y = 12x$ .

א. פתרו את המשוואה.

$$\cdot \begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=11 \end{cases}$$

ב. מצאו פתרון המקיים:

$$\cdot \begin{cases} y(0)=4 \\ y'(0)=2 \\ y''(0)=1 \end{cases}$$

ג. נסו למצוא פתרון המקיים:

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תנו דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים  $y(0) = 1$ .

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

$$\cdot \begin{cases} x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

2) נתונה הבעה:

הראו כי  $y_1(x) = x^2$  ו-  $y_2(x) = \sin 4x$ , הם פתרונות של הבעה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

3) האם קיימת משווה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה  $x=0$ , כך שהפתרונות  $y = 4x$  ו-  $y = \sin 4x$  הן פתרונותיה?

### תשובות סופיות

1) א.  $x^2y'' - 3xy' + 3y = 4e^{2x} - 3e^{-2x}$       ב.  $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

## השיטה האופרטורית

**הערה:** נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

בשאלות אלו הסימון הוא :  
 $\cdot (aD^2 + bD + c)y = Q(x) \Leftrightarrow ay'' + by' + cy = Q(x)$

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (1)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (3)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (4)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (5)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3\sin x \quad (6)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2\cos x \cos 2x \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1 \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (3)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x \quad (7)$$

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

### פרק 16 - משוואות לינאריות מסדר ח

#### תוכן העניינים

136 .....	1. משואה חסירה מסדר שלישי .....
137 .....	2. משואה לינארית הומוגנית עם מקדים קבועים .....
140 .....	3. שיטת השוואת מקדים .....
142 .....	4. שיטת וריאצית הפרמטרים .....
(לא ספר) .....	5. משואת אוילר מסדר שלישי .....
143 .....	6. הורונסקיין ושימושו .....
144 .....	7. השיטה האופרטורית .....

## משואה חסירה מסדר שלישי

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$y''' - (y'')^2 - 3y''(y')^2 - 4(y')^4 = -16y(y')^3 \quad (1)$$

עם תנאי ההתחלה  $y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = -12$

$$\begin{cases} y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = y''y' - 2(y')^2 y \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = y''y' - 2(y')^2 y \\ y(0) = -1, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$3y'''y - y'y'' = 0 \quad (4)$$

$y(1) = 1, y'(1) = 3, y''(1) = 6$

$$\begin{aligned} (y'y''' - 2(y'')^2)y^2 &= -(y')^4 \\ y > 0 \\ y(1) = y'(1) = y''(1) &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{4}\ln|-3+4y| = x + \frac{1}{4}\ln 3 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{1-x} - 1 \quad (2)$$

$$y = \tan x - 1 \quad (3)$$

$$y = x^3 \quad (4)$$

$$y = e^{x-1} \quad (5)$$

## משואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-15:

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0 \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 0 \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad (3)$$

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0 \quad (4)$$

$$y^{(4)} - y = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 20y = 0 \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y = 0 \quad (7)$$

$$y^{(6)} - y'' = 0 \quad (8)$$

$$(D^5 + 3D^4 + 2D^3 - 2D^2 - 3D - 1)y = 0 \quad (9)$$

$$y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0 \quad (10)$$

$$z''' - 6z'' + 12z' - 8z = 0 \quad (11)$$

$$y^{(4)} - 4y = 0 \quad (12)$$

$$x^{(6)} - 3x^{(4)} + 3x'' - x = 0 \quad (13)$$

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 4 \\ y''(0) = -1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 6y' - 12y + 8y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \\ y''(0) = -19 \\ y'''(0) = -47 \end{cases} \quad (15)$$

- 16)** נתונה משוואה דיפרנציאלית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6, אשר אחד הפתרונות שלה הוא  $x^2 e^x \cos 2x$ .
- מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה.
  - מצאו את המשוואה.

**תשובות סופיות**

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{0x} [c_3 \cos x + c_4 \sin x] \quad (5)$$

$$y = c_1 e^{-4x} + e^x [c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x] \quad (6)$$

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left( c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + \cos x + \sin x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} + c_5 x^3 e^{-x} \quad (9)$$

$$y = e^x [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + x e^x [c_3 \cos x + c_4 \sin x] + \\ + e^{-x} [c_5 \cos x + c_6 \sin x] + x e^{-x} [c_7 \cos x + c_8 \sin x] \quad (10)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} \quad (11)$$

$$y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x \quad (12)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x} \quad (13)$$

$$y = e^x + 2 \cos x + 3 \sin x \quad (14)$$

$$y = e^x - 2 e^{2x} + 3 \cos 2x + 4 \sin 2x \quad (15)$$

$$y = e^x [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x] + x e^x [c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x] + \\ + x^2 e^x [c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x] \quad (16)$$

$$y''''' - 6y'''' + 27y''' - 68y'' + 135y' - 150y + 125y = 0 . \blacksquare$$

## שיטת השוואת מקדמים

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 2\sin x - 4\cos x \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = -28e^{2x} \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14 \quad (3)$$

$$y''' - 3y' + 2y = e^x \quad (4)$$

$$y''' - y'' + y' - y = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 2 \end{cases} \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x^3 + 4 \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x (\cos x - \sin x) \quad (5)$$

$$y = -4.5 + 4e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2} e^{2x} \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x \quad (7)$$

## שיטת וריאצית הפרמטרים

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1+e^{-x}} \quad (2)$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x} \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + \ln \left| \tan x + \frac{1}{\cos x} \right| - x \cos x + \sin x \ln |\cos x| \quad (1)$$

$$\begin{aligned} y &= c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( e^x + 1 - \ln(e^x + 1) \right) + e^x \left( -\ln(e^x + 1) \right) + e^{2x} \left( -\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x}) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - \frac{3}{4} x^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \ln |x| \quad (3)$$

## הוורונסקיין ו שימושיו

### שאלות

- 1)** האם קיימת מד"ר מהצורה  $y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$  בעלת מקדמים רציפים בקטע  $[-1, 1]$ , כך שהפונקציות  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = x^2$ ,  $y_3(x) = x^3$  הן פתרונות שלה?
- 2)** נתונות הפונקציות  $y_1(x) = 4 - x$ ,  $y_2(x) = 4 + x$ ,  $y_3(x) = 20 + x$ .  
 א. חשבו את הוורונסקיין של הפונקציות.  
 ב. קבעו האם הפונקציות תלויות בקטע  $(-\infty, \infty)$ .  
 ג. ענו שוב על סעיף ב', במידעה שלוש הפונקציות הן פתרונו של המד"ר  $y''' = 0$ .
- 3)** פתרו את הסעיפים הבאים:  
 א. יהיו  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$  פונקציות גזירות ברציפות שלוש פעמיים בקטע  $I$ , ונניח כי הוורונסקיין שלהם שונה מאפס ב-  $I$ . הוכיחו כי קיימת משווהה הומוגנית מסדר 3, בעלת מקדמים רציפים בקטע  $I$ , כך ש-  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$  הם פתרונות שלה.  
 ב. רשמו משווהה לינארית, הומוגנית, מסדר שלישי, עם מקדמים רציפים, שהפונקציות  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = x^2$ ,  $y_3(x) = x^3$  הן פתרונות שלה.

### תשובות סופיות

- 1)** לא. הפונקציות מתאפסות רק בנקודת אחת  $x = 0$ .
- 2)** א.  $W = 0$ . ג. הפונקציות תלויות.
- 3)** א. שאלת הוכחה. ב.  $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0$ ,  $x \neq 0$ .

## השיטה האופרטורית

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 4e^x - 10e^{-2x} \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 10e^{4x} + 2e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^4 - 6D^3 + 13D^2 - 12D + 4)y = 10e^x + 4e^{2x} \quad (3)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = 24e^x + 81e^{4x} \quad (4)$$

$$(D^6 + D^4 + D^2)y = 104\sin(2x+1) + \cos(x+10) \quad (5)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = -5\sin 2x \quad (6)$$

$$(D^4 - 3D^3 + 6D^2 - 12D + 8)y = 30\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2} + 48\cos^2 x - 16 \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$$y = c_1e^{0x} + c_2e^{-x} + c_3e^{3x} - e^x + e^{-2x} \quad (1)$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x} + c_4e^{-5x} + \frac{5}{81}e^{4x} - \frac{1}{18}xe^x - \frac{1}{30} \quad (2)$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{2x} + c_4xe^{2x} + 5x^2e^x + 2x^2e^{2x} \quad (3)$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4x^3e^x + c_5e^{4x} - \frac{1}{3}x^4e^x + xe^{4x} \quad (4)$$

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x} + c_5e^{3x} + c_6e^{-3x} - 2\sin(2x+1) - \cos(x+10) \quad (5)$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4x^3e^x + c_5e^{4x} + \frac{1}{500}[4\sin 2x - 22\cos 2x] \quad (6)$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x + \frac{5\sin x + 25\cos x}{26} + \frac{-3\cos 2x - 18\sin 2x}{37} + 1 \quad (7)$$

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

### פרק 17 - מערכת משוואות לינאריות

#### תוכן העניינים

1. חזרה מאלגברת לינארית - ערכאים עצמאיים, וקטוריים עצמאיים.....	145
2. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת הלכISON .....	147

## חזרה אלgebra לינארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

### שאלות

בשאלות הבאות מצאו את הערכים העצמיים והווקטוריים העצמיים של  $A$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

### תשובות סופיות

$$x=0, \quad x=1, \quad x=2, \quad v_{x=0} = (-1, 0, 1), \quad v_{x=1} = (0, 1, 0), \quad v_{x=2} = (1, 0, 1) \quad (1)$$

$$x=6, \quad x=2, \quad x=-4, \quad v_{x=6} = (0, 0, 1), \quad v_{x=2} = (1, 1, 1), \quad v_{x=-4} = (-1, 1, 0) \quad (2)$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 3, \quad v_{x=2} = (1, 1, 1), \quad v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1) \quad x_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0) \quad (3)$$

$$x=1, \quad x=3, \quad x=-2, \quad v_{x=1} = (-1, 4, 1), \quad v_{x=3} = (1, 2, 1), \quad v_{x=-2} = (-1, 1, 1) \quad (4)$$

$$x=1, \quad x=4, \quad x=-1, \quad v_{x=1} = (1, -2, 1), \quad v_{x=4} = (1, 1, 1), \quad v_{x=-1} = (-1, 0, 1) \quad (5)$$

$$x=-1, \quad x=3 \quad v_{x=-1} = (-1, 2), \quad v_{x=3} = (1, 2) \quad (6)$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i, \quad v_{x=1+2i} = (1+i, 2), \quad v_{x=1-2i} = (1-i, 2) \quad (7)$$

$$x=1, \quad x=1+\sqrt{3}i, \quad x=1-\sqrt{3}i, \quad v_{x=1} = (1, 1, 1), \quad , \quad (8)$$

$$v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2), \quad v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2)$$

## מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הלבסן

### שאלות

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 1-2:

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (1)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ כך ש}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ נתון } (3)$$

הוכיחו כי  $z(t) = y(t)$

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 4-5:

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z \\ y' = 3x + 2y - z \\ z' = 2x + y - z \end{cases} \quad (4)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (5)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ נתון } (6)$$

$$\text{חשבו: } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

7) פתרו את מערכת המשוואות :  

$$\begin{cases} y_1' + 5y_1 - 2y_2 = 0 \\ 3y_2' - 4y_1 - 5y_2 = 0 \end{cases}$$

8) פתרו :  

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ כאשר } \vec{x}'(t) = A \cdot \vec{x}(t)$$

הערה : בשאלות 7 ו-8 יש להגיע לפתרון המורכב מהפתרונות ממשי.

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 9-14 :  
(שימוש לב שכל המערכות אין ניתנות ללבסן)

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (9)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (10)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (11)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (12)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (13)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (14)$$

$$15) \text{ דמי פתר את המערכת } , x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} x(t)$$

$$\cdot x(t) = c_1 e^{-1t} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 {}^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{0t} \left[ t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \text{ וקיים}$$

$$\cdot x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : \text{ נתון תנאי התחלה}$$

עבור אילו ערכים של קבועים המשאים,  $a, b, c$ , הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה הנתון יהיה חסום לכל  $t$  ממשי?

### תשובות סופיות

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$z(t) = y(t) \quad (3)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

0 (6)

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \left[ \cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 e^t \left[ \cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad (7)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left[ \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] +$$

$$+ c_3 e^t \left[ \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (8)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -2t+1 \\ 2t-1 \\ t \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 0.5t^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} t^2 - t + 2 \\ \frac{t^2}{2} + 1 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t-1 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} + c_4 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ t-2 \\ \frac{t^2}{2} - t + 1 \\ \frac{t^3}{6} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -2t+1 \\ -4t \\ -2t \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$a = -c, \quad b = 2a \quad (15)$$

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

### פרק 18 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

#### תוכן העניינים

1. בעיות גדילה ודעיכה.	152
2. בעיות בגיאומטריה אנליטית	154
3. עקומות אורתוגונליות.	156
4. בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום	157
5. בעיות שונות	158

## בעיות גדילה ודעיכה

### שאלות

- 1)** קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה.  
 ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.  
 א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?  
 ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?  
 ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?  
 \*הניחס שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שככל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).
- 2)** האוכלוסייה בעיר מסויימת גדלה מעריכית.  
 בשנה מסויימת היו בעיר 400 אלף תושבים,  
 ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.  
 א. מצאו את אחוזו הגידול השנתי.  
 ב. מצאו בעבר כמה שנים (החל מהשנה המסויימת),  
 היו בעיר 550 אלף תושבים.
- 3)** אדם הפקד סכום כסף בבנק בריבית דרייבית של 4%.  
 בעבר 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש"ח.  
 א. כמה כסף הפקד האדם?  
 ב. בעבר כמה שנים היו לאדם 7,000 ש"ח?
- 4)** מספר חיים הבר בעין גדי גדול בצורה מעריכית.  
 בספירה הראשונית היו 1,000 חיים.  
 בספירה השנייה שנעשתה, בעבר 20 חודשים, היו 1,400 חיים בר.  
 מצאו אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה,  
 היו בשמורה 2,000 חיים בר.
- 5)** ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים.  
 ידוע כי קצב ההתרופקות הרגעי של היסוד,  
 פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.  
 א. כמה גרמים של יסוד זה ישרוו אחרי 1,000 שנים,  
 מכמות התחלתית של 100 גרם?  
 ב. בעבר כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם,  
 מכמות התחלתית של 100 גרם?

- 6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, ובכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע. בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, ובכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.
- בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה שווה?
  - בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכך?

### תשובות סופיות

- |                |                 |                  |     |
|----------------|-----------------|------------------|-----|
| ג. בשנת 2,106. | ב. 3.54.        | א. 7.28 מיליארד. | (1) |
|                | ב. 15.92 שנים.  | א. 2%.           | (2) |
|                | ב. 13.41 שנים.  | א. 4093.65 ט.    | (3) |
|                | ב. 19,188 שנים. | א. 40.77 חודשים. | (4) |
|                | ב. 14.6 שבועות. | א. 88.69 גרם.    | (5) |
|                | ב. 3.04 שבועות. | א. סולומון ©     | (6) |

## בעיות גיאומטריות

### שאלות

1) על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה  $(x, y)$  על העקום,

$$\text{שווה ל } -\frac{x}{y}.$$

מצאו את משוואת העקום.

2) מצאו את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

3) מצאו את משוואת העקום, שהשיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

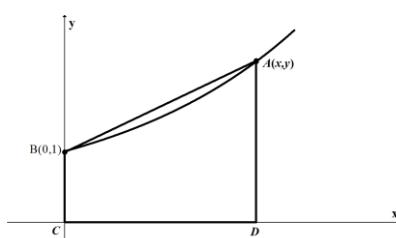
4) תרגמו את התייאור המילולי הבא למשוואה דיפרנציאלית ופתרו אותה:  
נתון עקום בربיע הראשון, העובר בנקודה  $(2,4)$ .

נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה  $(x, y)$  מעליו, ובין שיפוע הישיר המחבר את  $A$  עם ראשית הצירים, שווה לשיעור  $\frac{y}{x}$  של הנקודה  $A$ .

5) מצאו את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה  $(3,4)$ , אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

6) קטע הנורמל לעקום בנקודה  $(x, y)$  שבין נקודה זו לציר ה- $x$ , נחצה על ידי ציר ה- $y$ .

מצאו את משוואת עקום זה.



7) נתון עקום העובר בנקודה  $B(0,1)$ .

בכל נקודה  $A$  שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז  $ABCD$ , הנראה בציור.

מהי משוואת העקום?

8) נתון עקום, בربיע הראשון, העובר בנקודה  $(1,3)$ , וSHIPOU המשיק אליו בנקודה  $(x, y)$  שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$ .  
מצאו את משוואת העקום.

**9)** מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה  $(1,2)$ ,

$$\cdot \frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

ושבכל נקודה  $(x, y)$  שעליו שיפוע הנורמל הוא

**10)** מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה  $(0,1)$ , כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר  $h-y$ , המשיק לעקום בנקודה כלשהו שעליו  $(x, y)$  וחותע  $OM$ ,

מהראשית  $O$  ל- $M$ , הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע  $MN$  (כאשר  $N$  היא הנקודה בה המשיק הנNIL חותך את ציר  $h-y$ ).

ציררו ציור מתאים ברבייע הראשון הממחיש את הבעיה.

### תשובות סופיות

$$x^2 + y^2 = k \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = k \quad (2)$$

$$y^2 = ax \quad (3)$$

$$y = 2xe^{x-2} \quad (4)$$

$$y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2} \quad (5)$$

$$2x^2 + y^2 = k \quad (6)$$

$$y = 2e^{x^2/4} - 1 \quad (7)$$

$$2xy + x^2 = 7 \quad (8)$$

$$x^3 - 3y^2x = 11 \quad (9)$$

$$2 = y + \sqrt{y^2 + x^2} \quad (10)$$

## עקומות אורתוגונליות

### שאלות

מצאו את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות 1-4:

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$xy = c \quad (2)$$

$$x^2 + 2y^2 = c . \quad (3)$$

ב. מצאו את העקומה האורתוגונלית לעקומה  $x^2 + 2y^2 = 9$   
בנקודה  $(1,2)$  שעליה.

$$x^2 + y^2 = cx \quad (4)$$

5) מצאו את משפחת העקומות, היוצרות זווית של  $45^\circ$

$$\text{עם משפחת המעגלים } x^2 + y^2 = c$$

### תשובות סופיות

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$y^2 - x^2 = k \quad (2)$$

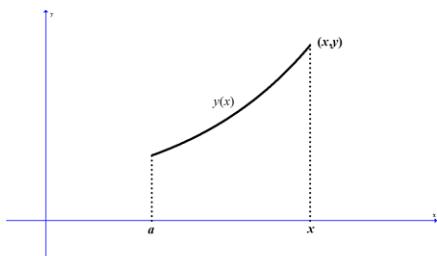
$$y = ax^2 , \quad y = 2x^2 \quad (3)$$

$$y = m(x-c)^2 \quad y > 0 \quad (4)$$

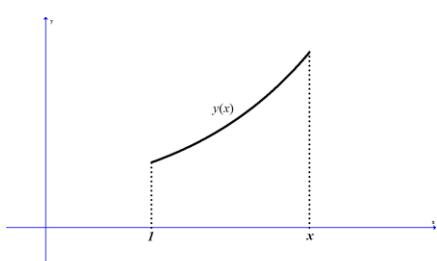
$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln \left( \left( \frac{y}{x} \right)^2 + 1 \right) = -\arctan \left( \frac{y}{x} \right) + c \quad (5)$$

## בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום

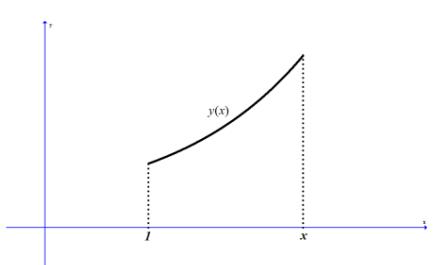
### שאלות



- (1) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = a$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי השטח  $S$  פרופורציונלי לאורך הקשת בין הנקודות  $(x, y(x))$  ו- $(a, y(a))$ . מצאו את משוואת העקום.



- (2) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = 1$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי  $y(1) = 2$ . האם קיים עקום כזה, כך ששטחו של  $S$  שווה ל- $2y(x)$ ?



- (3) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = 1$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי  $y(1) = 2$ . האם קיים עקום כזה, כך שהשטח של  $S$  שווה ל- $2 - y(x)$ ?

### תשובות סופיות

$$y = k \cosh\left(\pm \frac{1}{k}x + C\right) \quad (1)$$

(2) לא.

(3) כן.

## בעיות שונות

### שאלות

- 1)** בזמן  $t = 0$ , יש במיכל 4 ק"ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים. נניח שמי מלח, בריכוזו של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים, מוזרמים לתוך המיכל בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזות החוצה מן המיכל באותו קצב.
- חשבו את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.
  - תוקן כמה זמן תהייה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?
- 2)** סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש. ברגע  $t = 0$ , כשהסירה מנוטה, מתחיל אדם, הנמצא בסירה, לחזור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה. משקל החותר והסירה הוא 500 ק"ג, וההתנגדות (ניוטון) שווה ל-  $2v^2$ , כאשר  $v$  נמדד במטר/שנייה.
- מצאו את מהירות הסירה מעבר חצי דקה.
  - מצאו מעבר כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שנייה.
  - מצאו את המהירות הסופית.
- 3)** חוק הקירור של ניוטון קובע, כי הקצב בו גופם מתקרר פרופורצionaliy להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה. חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה, השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון, ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.
- מהי טמפרטורת החומר לאחר שעיה?
  - כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?
- 4)** נתון מיכל בצורת גליל, שרדיו בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים. ברגע מסוים פותחים ברז מתחתית הגליל, והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורצionaliy לשורש מגובהם. נסמן ב-  $(t)h$  את גובה פני המים, וב-  $k$  את קבוע הפרופורציה.
- רשמו מד"ר עבור גובה פני המים, וב-  $k$  את קבוע הפרופורציה.
  - מהו תנאי ההתחלתה של הבעיה?
  - ידעו כי  $\pi r^2 = k$ .
  - פתרו את המד"ר.
  - תוקן כמה זמן תישאר בגליל ממחצית מכמות המים ההתחלתית?

5) כדור שלג, שרדיוסו ההתחלתי  $4 \text{ ס"מ}$ , נמס, כך שהקცב שבו רדיוסו קטן – פרופורציוני לשטח פניו.

לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל- $3 \text{ ס"מ}$ .

א. רשמו נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן  $t$ .

ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג  $\frac{1}{64}$  מינוחו ההתחלתי?

6) מבлон מלא אויר, שרדיוסו  $R$ , מתחילה לצאת אויר.

קצב יציאת האויר הוא  $(t) V$ , כאשר  $V(t)$  הוא נפח הבלון בזמן  $t$ .

הוכיחו כי כעבור  $2 \ln$  שניות נפח הבלון יקטן לכדי שמיינית מינוחו ההתחלתי.

הערה: בשאלות 5 ו-6 נדרש ידוע בהפרצת משתנים.

### תשובות סופיות

1) א.  $26.75 \text{ ק"ג}$ .      ב.  $0.942 \text{ דקotas}$ .

2) א.  $4.09 \text{ מטר/שניה}$ .      ב.  $72 \text{ שניות}$ .

3) א.  $43\frac{1}{3}^\circ$ .      ב.  $1.13 \text{ שעות}$ .

4) א.  $h(0) = 4$ ;  $\pi h'(t) = k\sqrt{h(t)}$ .  
 $h = (2-t)^2$ ;  $t = \sqrt{2} + 2$ .      ב.

5) א.  $R(t) = \frac{12}{2t+3}$ .  
 $t = 4.5 \text{ שעות}$ .

6) שאלת הוכחה.

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 19 - בעיות שטורים ליום

תוכן העניינים

160 ..... 1. בעיות שטורים ליום

## בעיות שטורים-ליוביל

### שאלות

**1)** הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לבניהת

$$\cdot (p(x)y'(x))' + (\lambda r(x) - q(x))y(x) = 0$$

(משוואת הרמייט)

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

(משוואת בסל)

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda)y = 0$$

**2)** הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורים-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y'' + e^{2x}y' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + 4y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

**3)** הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורים-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y'' + 4y' + xy + \lambda e^x y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורים-ליוביל בשאלות 4-7:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמאיים ופונקציות עצמאיות)

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y(0) - y'(0) = 0 \\ y(\pi) - y'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$8) \text{ נתונה הבעיה הבאה:} \\ . \begin{cases} y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

- א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורים-ליוביל רגולרית.  
ב. פתרו את הבעיה.

9) פתרו את בעיית שטורים-ליוביל הבאה:

$$. \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \ell \\ y(0) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases} \text{ א.}$$

$$. \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \text{ ב. נציב } \ell = 1 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

פתחו את הפונקציה  $f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$ .

לטור פונקציות עצמאיות של בעיית שטורים-ליוביל זו.

התחל את הטור  $m=1$ .

מה סכום הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ?

האם הוא שווה לערך הפונקציה  $f(x) = 1$ ?

$$. \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \text{ ג. נציב } \ell = 2 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

פתחו את הפונקציה  $f(x) = x, 0 \leq x \leq 2$ .

לטור פונקציות עצמאיות של בעיית שטורים-ליוביל זו.

10) פתרו את בעיית שטורים-ליוביל הבאה:

$$. \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases} \text{ א.}$$

ב. פתחו את הפונקציה  $f(x) = e^x, 0 \leq x \leq \pi$ .

לטור פונקציות עצמאיות של בעיה מסעיף א.

התחלו את הטור  $m=1$ .

11) נתונה ה\u00d7ב\u00d7עה :  $\begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0 & , 0 < x < e \\ y(1) = 0 \\ y'(e) = 0 \end{cases}$

- א. הוכחו שה\u00d7ב\u00d7עה הנתונה היא אכן בעית שטו\u00d7רמ\u00d7-לי\u00d7ב\u00d7יל רגולרית.
- ב. מצאו את הערכאים עצמאיים והפונקציות העצמאיות של ה\u00d7ב\u00d7עה.
- ג. הראו שהפונקציות העצמאיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של ה\u00d7ב\u00d7עה.

ד. פתחו את  $f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e} \leq x \leq e \end{cases}$ , לטור פונקציות עצמאיות.

- הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור  $x=1$  שונים.
- ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור  $x = \sqrt{e}$ ,  $x = 1.5$ ,  $x = 2$ .

**זהויות שכדי להכיר :**

$$\begin{aligned} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\pi n) = (-1)^n \\ \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \sin(\pi n) = 0 \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

## תשובות סופיות

(1) א.  $(xy')' + \left(\lambda\left(-\frac{1}{x}\right) - (-x)\right)y = 0$       ב.  $\left(e^{-x^2}y'\right)' + \left(\lambda e^{-x^2} - 0\right)y = 0$

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) פונקציות עצמיות :  $\varphi_n(x) = \cos(n\pi x)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

ערכים עצמיים :  $\lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2$      $n = 1, 2, 3, \dots$

(5) פונקציות עצמיות :  $\phi_n(x) = n \cos nx + \sin nx$      $n = 1, 2, 3, \dots$

ערכים עצמיים :  $\lambda = -1$ ,  $\lambda_n = n^2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  הוא ע"י של הבועה,

.  $\varphi(x) = e^x$

(6) פונקציות עצמיות :  $\varphi_n(x) = \sin(\omega_n x)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

ערכים עצמיים :  $\lambda_n = (\omega_n)^2$      $n = 1, 2, 3, \dots$

(7) פונקציות עצמיות :  $y_n(x) = \sin(\omega_n x) - \omega_n \cos(\omega_n x)$      $n = 1, 2, 3, \dots$

ערכים עצמיים :  $\lambda_n = (\omega_n)^2$      $n = 1, 2, 3, \dots$

.  $\varphi(x) = x - 1$  הוא ע"י של הבועה, המתאים לפונקציה העצמית

.  $\varphi_n(x) = e^x \sin n\pi x$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$     ב. פונקציות עצמיות :

(8) א. שאלת הוכחה.    ב. פונקציות עצמיות :

ערכים עצמיים :  $\lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2$      $n = 1, 2, 3, \dots$

(9) א. פונקציות עצמיות :  $\varphi_n(x) \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right)$      $n = 0, 1, 2, \dots$

ערכים עצמיים :  $\lambda_n = (\omega_n)^2 = \left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2$      $n = 0, 1, 2, \dots$

. סכום הטור ב-  $x=0$  הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב-  $x=0$ .

.  $(0 < x < 2)$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{\pi^2 (2n+1)^2} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$  ג.

(10) א. פונקציות עצמיות :  $\varphi_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2} x$      $n = 0, 1, 2, \dots$

ערכים עצמיים :  $\lambda_n = (\omega_n)^2 = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$      $n = 0, 1, 2, \dots$

.  $0 < x < \pi$ ,  $e^x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi} \left(n - \frac{1}{2}\right) (-1)^{n+1} - 1}{1^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right)$  ב.

11) א. שאלת הוכחה.

$$\cdot \varphi_n(x) = \sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \ln x\right)$$

ב. פונקציות עצמיות :  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\cdot \lambda_n = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + n\right)^2$$

ערכים עצמיים :  $n = 0, 1, 2, \dots$

ג. שאלת הוכחה.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2 \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi} \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)\ln x\right).$$

ה. סכום הטור ב-  $x = 1.5$  הוא 1 ; וב-  $x = \sqrt{e}$  הוא 0 ; וב-  $x = 2$  הוא ?

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

### פרק 20 - נגרות חלקיות דיפרנציאביליות

#### תוכן העניינים

165 .....	1. נגרות חלקיות מסדר ראשון
167 .....	2. נגרות חלקיות מסדר שני
171 .....	3. נגרות חלקיות לפי הגדרה.
173 .....	4. דיפרנציאביליות

## נגזרות חלקיות מסדר ראשון

### שאלות

**בשאלות 1-10** חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \quad .(f_x) f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8) \qquad f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin(ut) \quad (10) \qquad f(x, y, z) = xy^2 z^3 \quad (9)$$

$$. z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad (11) \quad \text{נתון}$$

$$. x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \quad \text{הוכיחו כי}$$

$$. f(x, y, z) = e^x \left( y^2 - \frac{1}{z} \right) \quad (12) \quad \text{נתון}$$

$$. \frac{\partial f}{\partial x} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) \quad \text{חשבו}$$

### הערת סימונו

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

**תשובות סופיות**

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \quad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \quad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \quad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \quad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \quad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

(11) שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = 4 \quad (12)$$

**הערת סימון**

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$
$f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$
$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$

## נגורות חלקיות מסדר שני

### שאלות

**בשאלות 1-14** חשבו את כל הנגורות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה :

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y} (x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2) e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1+x^2+y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (13)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (14)$$

**15) חשבו**  $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$ , עבור  $f'_{xy}(1,1)$

**16) חשבו**  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ , עבור  $f'_{xy}(1,1)$

**17) חשבו**  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , עבור  $f'_{xy}(1,1)$

**18) נתנו**  $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$   
 $\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,e)$

### הערת סימון

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1$	$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$
$f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}$	$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$
$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12}$	$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$

**תשובות סופיות**

$$f_y = -2x^2y + 10 \quad f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1)$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy \quad f_{yy} = -2x^2$$

$$f_y = \frac{x^4}{y} \quad f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$$

$$f_y = 3y^2 - 6x \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 - 6y \quad (3)$$

$$f_{yx} = -6 \quad f_{xy} = 6 \quad f_{yy} = 6y$$

$$f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4)$$

$$f_{xy} = -3 \quad f_{yy} = 6y - 6$$

$$f_y = x^2 - 2xy \quad f_{xx} = 2y \quad f_x = 2xy - y^2 \quad (5)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y \quad f_{yy} = -2x$$

$$f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] \quad (6)$$

$$f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0]$$

$$f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] \quad f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$$

$$f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$$

$$f_y = e^{xy} (x^2 + xy + 1) \quad f_x = e^{xy} (xy + y^2 + 1) \quad (7)$$

$$f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy} \quad f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy}$$

$$f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy}$$

$$f_y = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2y) \quad f_x = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) \quad (8)$$

$$, f_{xx} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y}$$

$$f_{yy} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y}$$

$$f_{xy} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y}$$

$$f_y = e^{-x^2-y^2} (4y - 2x^2y - 4y^3) \quad f_x = e^{-x^2-y^2} (2x - 2x^3 - 4xy^2) \quad (9)$$

$$f_{xx} = e^{-x^2-y^2} (-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{yy} = e^{-x^2-y^2} (-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = e^{-x^2-y^2} (-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

$$f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)}$$

$$f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x+4y)$$

$$f_x = 10 \cos(10x+4y) \quad (13)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x+4y)$$

$$f_y = 4 \cos(10x+4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xy} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xz} = y \quad f_{xy} = z$$

$$f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (14)$$

$$f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0$$

$$f_{yx} = z \quad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x$$

$$f_{zx} = y \quad f_z = xy$$

$$-2 \quad (15)$$

$$-1 \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (17)$$

$$\frac{4}{e^2} \left( 1 + \frac{1}{e} \right) \quad (18)$$

16

## נגזרות חלקיות לפי ההגדלה

### שאלות

$$1) \text{ נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה  $(0,0)$ .
- ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה  $(0,0)$ ?
- ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$2) \text{ מצאו את הנגזרות החלקיות של } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ בנקודה } (0,0).$$

$$3) \text{ מצאו את הנגזרות החלקיות של } f(x,y) = \begin{cases} \frac{(y+x^2)^2}{y^2+x^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ בנקודה } (0,0).$$

$$4) \text{ נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה  $(0,0)$ .

ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה  $(0,0)$  וחשבו אותן.

$$5) \text{ נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.
- ב. האם הנגזרות החלקיות של הפונקציה רציפות בנקודה  $(0,0)$ ?

$$6) \text{ נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

א. בדקו האם  $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ , על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה  $(0,0)$ ?

ג. האם  $f_{yxyxyxy}(1,4) = f_{xyxyxyx}(1,4)$

**הערה**  
תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת דיפרנציאביליות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

### תשובות סופיות

1) א.  $0$       ב. לא רציפה בנקודה  $(0,0)$       ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

2)  $f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 1$

3)  $f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0$

4) א. שאלת הוכחה.      ב.  $0$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad 5) \quad \text{א.}$$

ב. לא רציפות.

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6) א.  $f_{xy}(0,0) = -1 \neq f_{yx}(0,0) = 1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה  $(0,0)$ .      ג. כן.

## difrensiyaliot

### שאלות

.**1-4** בדקו האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה  $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x+y}{y+4x} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (4)$$

.**5** בדקו דיפרנציאbilיות הפונקציה  $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

**6** נתון  $, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$  קבוע.

- א. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה רציפה בראשית?
- ב. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
- ג. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

$$7) \text{ נתון } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^m} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה רציפה בראשית?  
 ב. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה גזירה חלקית בראשית?  
 ג. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

8) תהי  $f$  פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה  $(0,0)$ .

$$\phi(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \text{ נגידיר פונקציה חדשה}$$

נתון  $f_x(0,0) = f_y(0,0) = f(0,0)$   
 הוכיחו ש-  $\phi$  דיפרנציאבילית בנקודה  $(0,0)$ .

$$9) \text{ בדקו דיפרנציאביליות } , f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{z \sin(xy)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases} \text{ בנקודה } (0,0,0).$$

$$10) \text{ נתונה } f : R^n \rightarrow R, \text{ המוגדרת על ידי} \\ . f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\|x\|^2} - 1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ 0.5 & x = 0 \end{cases} \text{ האם } f \text{ דיפרנציאבילית בנקודה } x = 0 ?$$

### תשובות סופיות

- (1) לא דיפרנציאבילית.
- (2) דיפרנציאבילית.
- (3) לא דיפרנציאבילית.
- (4) לא דיפרנציאבילית.
- (5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במשור.  
 ג.  $m > 2$       ב.  $0 < m < 1$       ג.  $m < 0.5$       ד. לכל  $m$
- (6) א.  $m > 1$
- (7) ב.  $m < 1$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) דיפרנציאבילית.
- (10) כן.

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 21 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

176 .....	1. הצגה פרמטרית של עקום.....
178 .....	2. הנגזרת ושימושה.....
179 .....	3. שימושי האינטגרל המסוים.....

## הציגה פרמטרית של עקום

### שאלות

**1)** עברו מן הציגה הפרמטרית הנתונה, להציגה קרטזית:

א.  $t \geq 0, x = t^2 + 1, y = t^2$

ב.  $0 \leq t \leq \pi, x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג.  $\pi \leq t \leq 2\pi, x = \cos t, y = 4 \sin t$

**2)** עברו מן הציגה הקרטזית הנתונה, להציגה פרמטרית:

א.  $1 \leq x \leq 4, y = x^4 + 1$

ב.  $-2 \leq x \leq 2, y = -\sqrt{4-x^2}$

ג.  $-2 \leq x \leq 2, y = +\sqrt{4-x^2}$

**3)** להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.  
על ידי חילוץ של הפרמטר  $t$ , מצאו משווה מתאימה,  
שבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים  $x$  ו-  $y$  בלבד:

א.  $x = t - 4, y = t^2$

ב.  $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג.  $x = 4 + \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד.  $x = t(t+1) + 1, y = t(0.5t+1) + 1$

ה.  $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20t-5t^2}{4+t^2}$

ו.  $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$

### תשובות סופיות

$$y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1 \quad \text{ב.} \quad y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0 \quad \text{ג.}$$

$$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi \quad \text{ב.} \quad x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4 \quad (2)$$

$$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi \quad \text{ג.}$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} \quad \text{ג.} \quad (x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ב.} \quad y = (x+4)^2 \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$x^2 - y^2 = 4k^2 \quad \text{ג.} \quad x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ה.} \quad x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ט.}$$

## הנגזרת ושימושה

### שאלות

**1)** חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה  
 $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases}$   
 הנתונה בצורה פרמטרית.

- 2)** נתון העקום  $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$
- שרטטו את העקום.
  - חשבו את  $(x', y)$  בשלוש דרכים שונות.
  - מצאו את משוואת המשיק לעקום, בנקודת  $t = -1$ .
  - מצאו את משוואת הנורמל לעקום, בנקודת  $t = -1$ .

- 3)** נתון העקום  $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 - 9 \end{cases}$
- שרטטו את העקום.
  - מצאו את משוואת המשיק לעקום בנקודת  $(0, 0)$ .
  - מצאו את הנקודות עבורהן המשיק לעקום הוא אופקי,  
ואת הנקודות עבורהן המשיק לעקום הוא אנכי.
  - עבור אילו ערכים של  $t$  העקום קמור/קעור?

### תשובות סופיות

$$y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3} \quad (1)$$

$$(2) \text{ א. ראו בסרטון. ב. } y = 2x + 3 \text{ ג. } y' = \frac{-2}{2t+1} \text{ ד. } y = -0.5x + 3$$

$$(3) \text{ א. ראו בסרטון. ב. } y = \pm\sqrt{3}x \text{ ג. אופקי- } (0, -9) \text{ אנכי- } (-2, -6), (2, -6) \text{ ד. } t > 1 \text{ או } t < -1 \text{ קמור.}$$

## שימושי האינטגרל המסוים

1) חשבו את השטח הכלוא בעקום  $C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}$

2) חשבו את השטח הכלוא בתחום האלייפסה  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , כאשר  $0 < a, b >$ ,

\* שימושו לב שאם  $a = b = r$ , נקבל שטח הכלוא בתחום מעגל עם רדיוס  $r$ .

3) חשבו את השטח הכלוא בין העקומים  $y = t + \sin t$  ו- $x = \cos t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , בין ציר ה- $x$ .

4) חשבו את השטח הכלוא בין העקומים  $y = \sin^2 t$  ו- $x = 4 \cos t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , בין ציר ה- $x$ .

5) חשבו את אורך העקום  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

6) חשבו את אורך העקום  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}$ , מהנקודה  $(1, 0)$  לנקודה  $(-1, \pi)$ .

7) חלקיים נס לארוך מסלול, המוגדר על ידי הציגה הפרמטרית  $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

מצאו את המרחק שהחלקיים עבר והשו אותו לאורך העקום עצמו.

8) חlek העקום  $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, t = 0$  ל- $t = \pi$ , מסתובב סביב ציר ה- $x$ . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

9) חlek העקום  $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, t = 0$  ל- $t = \frac{\pi}{2}$ , מסתובב סביב ציר ה- $y$ . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

10) חשבו את אורך העקום  $\begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}, -\pi \leq t \leq 2\pi$

. $1 \leq t \leq 3$ ,  $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + (e^t)\mathbf{k}$  **11)** חשבו את אורך העקום

### תשובות סופיות

$8/3$  **(1)**

$\pi ab$  **(2)**

$1.5\pi$  **(3)**

$16/3$  **(4)**

$8$  **(5)**

$4$  **(6)**

**7)** אורך העקום הוא  $2\pi$ . המרחק שעבר החלקיק הוא  $4\pi$ .

$4\pi r^2$  **(8)**

$6\pi/5$  **(9)**

$6\pi\sqrt{29}$  **(10)**

$\sqrt{3}e(e^2 - 1)$  **(11)**

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

### פרק 22 - נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה

#### תוכן העניינים

181 .....	1. קוואורדינטות קוטביות.....
183 .....	2. הנגורת ושימושה.....
184 .....	3. שימושי האינטגרל המסתויים.....

## קואורדינטות קוטביות

### שאלות

**1)** ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את הנקודה הקוטבית  $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$  لنקודה קרטזית.
- ב. המירו את הנקודה הקרטזית  $(-1, -1)$  لنקודה קוטבית.

**2)** ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את הנקודה הקוטבית  $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$  لنקודה קרטזית.
- ב. המירו את הנקודה הקרטזית  $(0, -4)$  لنקודה קוטבית.
- ג. המירו את הנקודה הקרטזית  $(2, 2)$  لنקודה קוטבית.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את המשוואה  $x^2 - 4x - xy = 1$  לקואורדינטות קוטביות.
- ב. המירו את המשוואה  $\theta = -4 \cos \theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

**4)** ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את המשוואה  $y^2 + x^2 = 4y$  לקואורדינטות פולריות.
- ב. המירו את המשוואה  $x = 10$  לקואורדינטות פולריות.
- ג. המירו את המשוואה  $y = 4$  לקואורדינטות פולריות.

**5)** ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את המשוואה  $r = 4$  לקואורדינטות קרטזיות.
- ב. המירו את המשוואה  $\theta = \pi/4$  לקואורדינטות קרטזיות.
- ג. המירו את המשוואה  $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$  לקואורדינטות קרטזיות.
- ד. המירו את המשוואה  $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

### תשובות סופיות

$$(r, \theta) = \left( \sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right) \text{ ב. } (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ א. } \mathbf{(1)}$$

$$(r, \theta) = \left( \sqrt{8}, \frac{3\pi}{4} \right) \text{ ג. } (r, \theta) = \left( 4, \frac{3\pi}{2} \right) \text{ ב. } (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ א. } \mathbf{(2)}$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב. } 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ א. } \mathbf{(3)}$$

$$r \sin \theta = 4 \text{ ג. } r \cos \theta = 10 \text{ ב. } r = 4 \sin \theta \text{ א. } \mathbf{(4)}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג. } y = x \text{ ב. } x^2 + y^2 = 4^2 \text{ א. } \mathbf{(5)}$$

$$6 \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)^3 \cdot y = 4 \sqrt{x^2 + y^2} - x \text{ ט}$$

## הנגזרת ושימושה

### שאלות

1) מצאו את המשוואת המשיק לעקום  $r = 3 + 8 \sin \theta$  בנקודה  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

2) מצאו את המשוואת המשיק לעקום  $r = 1 - 2 \sin \theta$  בראשית הצירים.

### תשובות סופיות

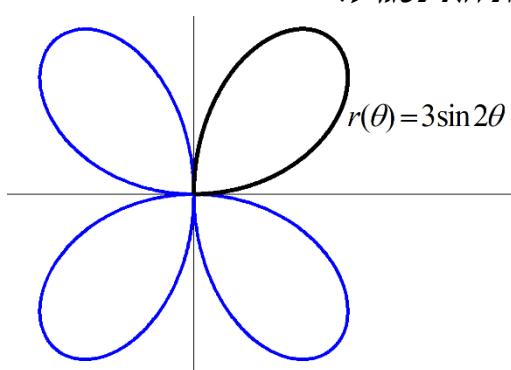
$$y = \frac{11\sqrt{3}}{5}x - \frac{98}{5} \quad (1)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \quad (2)$$

## שימושי האינטגרל המסוים

### שאלות

- 1) חשבו את השטח של הלולה הפנימית של  $r = 2(1 + 2 \cos \theta)$ .
- 2) חשבו את השטח הכלוא בתווך  $r = 6 + 4 \cos \theta$  ומשמאלי לציר ה- $y$ .
- 3) חשבו את השטח הכלוא בתווך  $r = 3 + 2 \sin \theta$ .
- 4) חשבו את השטח המוגבל בתווך  $r = 3 + 2 \sin \theta$  ומחוץ ל- $r = 2$ .
- 5) חשבו את השטח המוגבל בתווך  $r = 2 + 3 \sin \theta$  ומחוץ ל- $r = 2$ .
- 6) חשבו את השטח המוגבל בתווך  $r = 2 + 3 \sin \theta$  ובתווך  $r = 2$  ובי-תווך  $\theta = \pi/2$ .
- 7) חשבו את השטח הכלוא בתווך המעגל  $r = 2 \sin \theta$  ומחוץ למעגל  $r = 1$ .
- 8) מצאו את אורך הקרדיויאידה  $r = 1 + \cos \theta$ .
- 9) מצאו את האורך של עליה אחד של הוורד  $r = 3 \sin 2\theta$ .  
אין צורך לחשב את האינטגרל!



- 10) מצאו את אורך העקום  $r = \theta$ , כאשר  $0 \leq \theta \leq 1$ .
- 11) העקום  $r = \cos \theta$ , כאשר  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , מסתובב סביב ציר ה- $x$ . מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

**12)** העקום  $r = 4 + 4 \sin \theta$ , כאשר  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , מסתובב סביב ציר ה- $y$ . מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

### תשובות סופיות

$$S = 4\pi - 6\sqrt{3} = 2.174 \quad (1)$$

$$S = 22\pi - 48 \quad (2)$$

$$S = 11\pi \quad (3)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} = 24.187 \quad (4)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3} = 2.196 \quad (5)$$

$$10.37 \quad (6)$$

$$S = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (7)$$

$$8 \quad (8)$$

$$\ell = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3 \cos^2 2\theta} d\theta \quad (9)$$

$$\ell = \frac{\sqrt{2 + \ln(\sqrt{2} + 1)}}{2} \quad (10)$$

$$S_x = \pi \quad (11)$$

$$S_y = 102.4\pi \quad (12)$$

## נספח - גרפים נפוצים בקואורדינטות פולריות

### קוויים

- הישר  $x = a$  .  $r \cos \theta = a$  **(1)**

- הישר  $y = b$  .  $r \sin \theta = b$  **(2)**

- הישר העובר דק' הראשית  $x = (\tan \beta) \cdot y$  .  $\theta = \beta$  **(3)**

### מעגלים

- מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו  $a$  .  $r = a$  .**1**

- מעגל שמרכזו בנקודה  $(a, 0)$  ורדיוסו  $|a|$  .  $r = 2a \cos \theta$  .**2**

- מעגל שמרכזו בנקודה  $(0, b)$  ורדיוסו  $|b|$  .  $r = 2b \sin \theta$  .**3**

.  $\sqrt{a^2 + b^2}$  - מעגל שמרכזו בנק'  $(a, b)$  ורדיוסו  $r = 2a \cos \theta + 2b \sin \theta$  .**4**

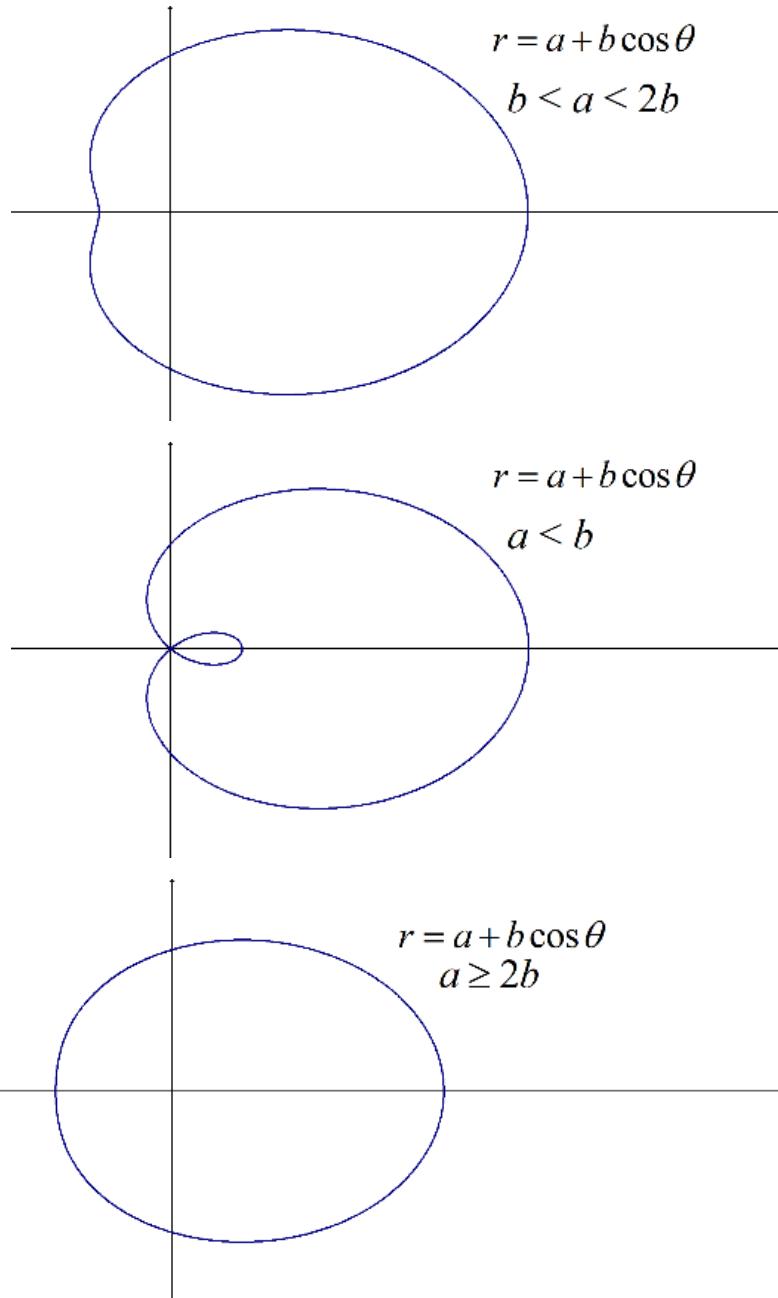
### קרדיודות ולמניסקטות

**(1)** קראדיודות :  $r = a \pm a \cos \theta, r = a \pm a \sin \theta$  גраф בצורת לב שמכיל את הראשית.

**(2)** למניסקטות עם לולאה פנימית  $(a < b)$  :  $r = a \pm b \cos \theta, r = a \pm b \sin \theta$  גраф שיכיל לולאה פנימית ושתמיד יכיל את הראשית.

**(3)** למניסקטות ללא לולאה פנימית  $(a > b)$  :  $r = a \pm b \cos \theta, r = a \pm b \sin \theta$  גраф ללא לולאה פנימית שאינו מכיל את הראשית.

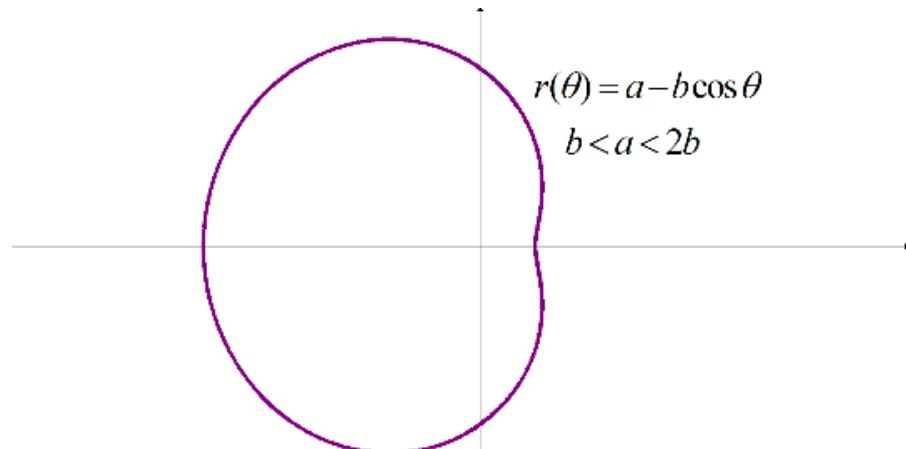
\* נדרש בדרך כלל עבור מחזורי שלם  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

**למינסקוטות ביתר פירות**
**הגרף של**  $r = a + b \cos \theta$ 


**הגרף של**

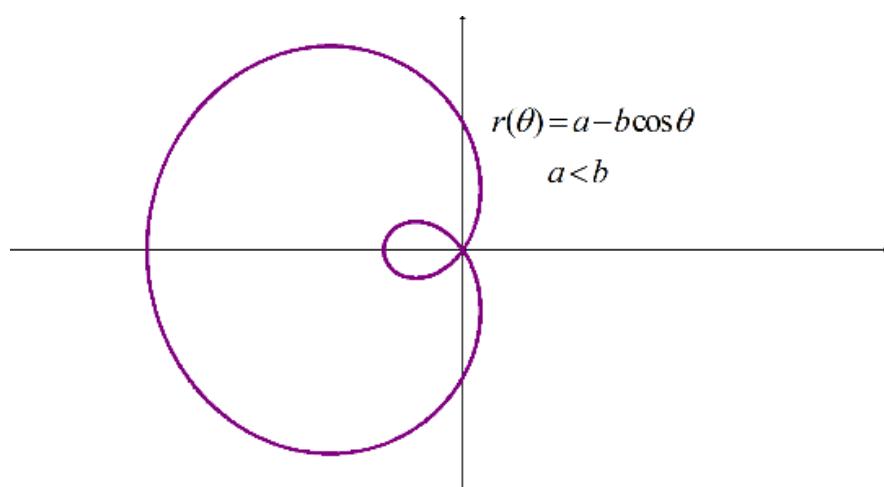
$$r(\theta) = a - b \cos \theta$$

$$b < a < 2b$$



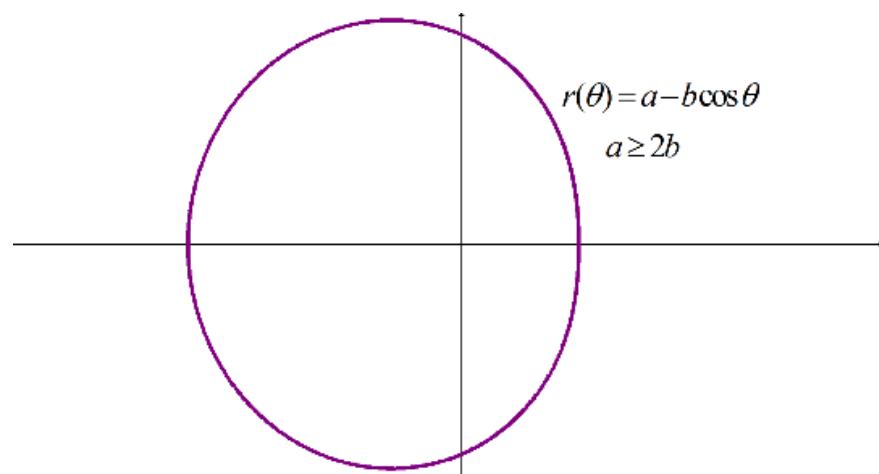
$$r(\theta) = a - b \cos \theta$$

$$a < b$$



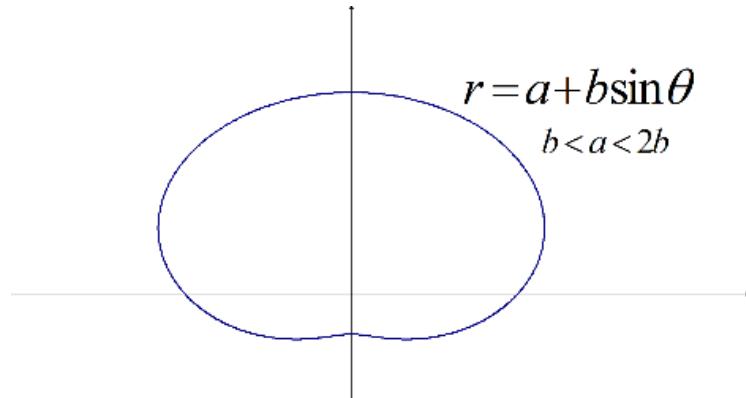
$$r(\theta) = a - b \cos \theta$$

$$a \geq 2b$$

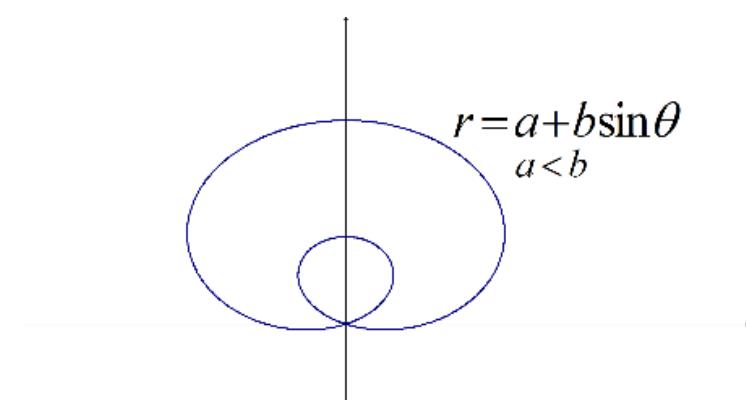


**הגרף של**

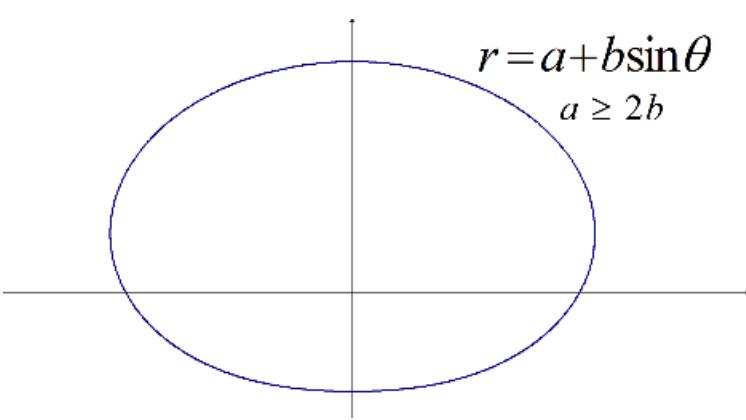
$$r = a + b \sin \theta$$
$$b < a < 2b$$



$$r = a + b \sin \theta$$
$$a < b$$

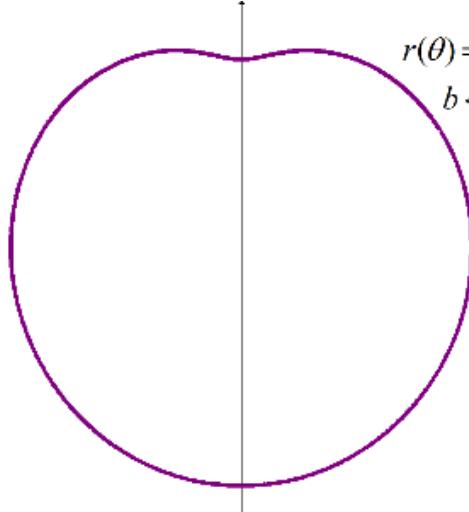


$$r = a + b \sin \theta$$
$$a \geq 2b$$

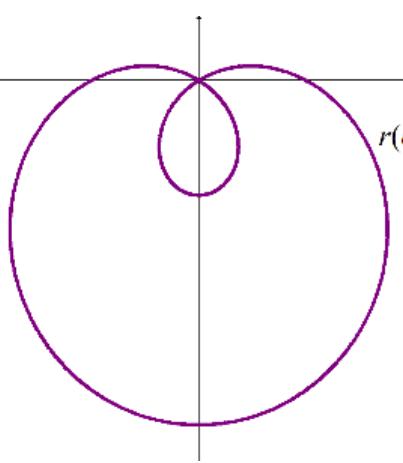


**הגרף של**

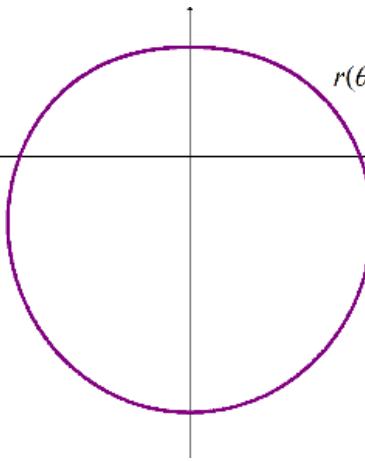
$$r(\theta) = a - b \sin \theta$$
$$b < a < 2b$$



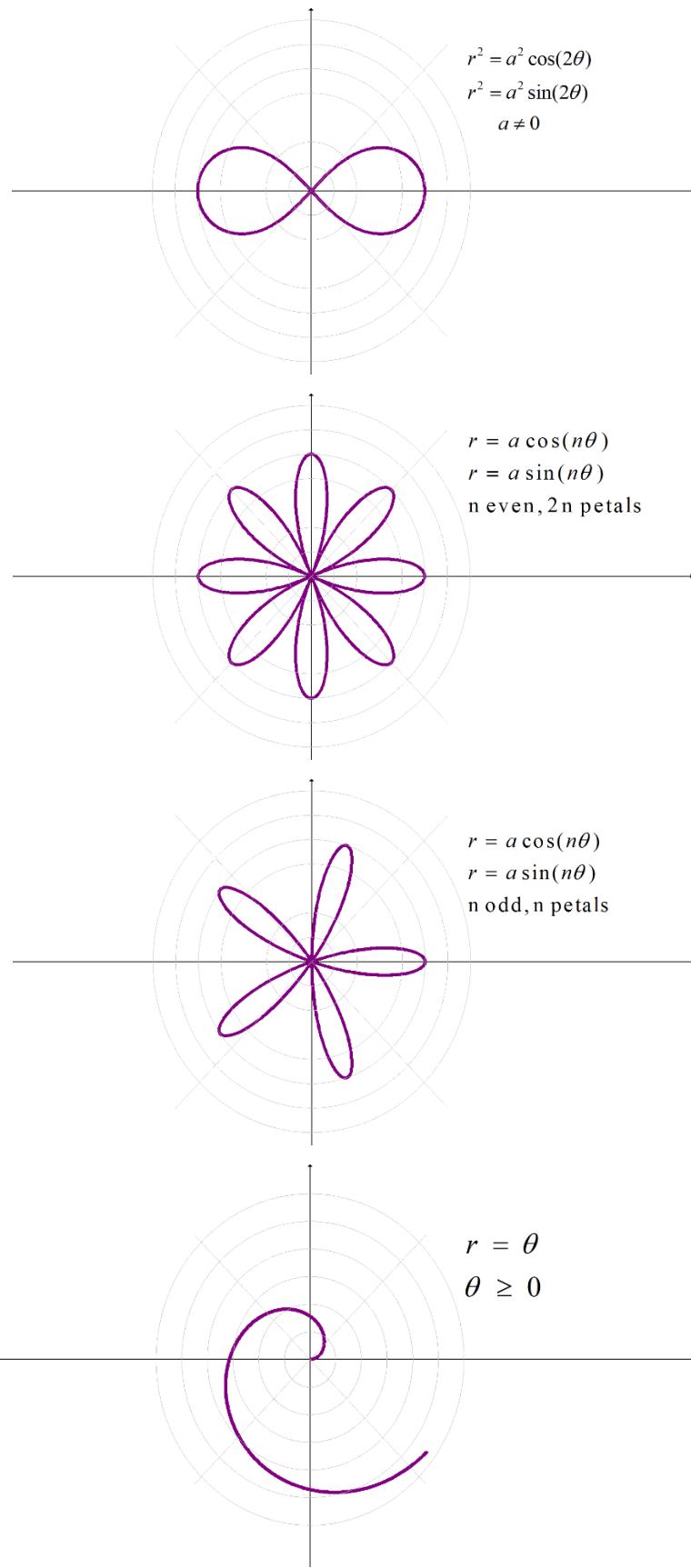
$$r(\theta) = a - b \sin \theta$$
$$a < b$$



$$r(\theta) = a - b \sin \theta$$
$$a \geq 2b$$



## גרפים נפוצים נוספים



## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 23 - אינטגרלים משולשים ו שימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים ו שימושיהם ..... 192

## אינטגרלים משולשים ו שימושיהם

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-4:

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz dy dx dz \quad (1)$$

$$\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z e^y dx dz dy \quad (2)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}, \iiint_B xyz^2 dV \quad (3)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq z \leq 1+x+y\}, \iiint_B 6xy dV \quad (4)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 5-8, על ידי שינוי סדר אינטגרציה:

$$\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4 \cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx dy dz \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dy dx dz \quad (6)$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2} dx dy dz \quad (7)$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dy dz dx \quad (8)$$

בשאלות 9-14 חשבו את **נפח הגוף** החסומים על ידי המשטחים :

$$z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0 \quad (9)$$

$$z = 0, z = x^2 + y^2, y = 1, y = x^2 \quad (10)$$

$$(x \geq 0) \quad z = 0, z = x^2 + y, y = 0.5x, y = 2x, y = \frac{2}{x} \quad (11)$$

$$z = 0, \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, 2y^2 = x \quad (12)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = y \quad (13)$$

$$z = x + y, z = 6, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (14)$$

(15) חשבו את המסה ואת מרכזו הכבוי של גליל שגובהו  $h$  ורדיוס הבסיס שלו  $r$ .  
הניחו שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונלית למרחק הנקודה מבסיס הגליל,  
כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה  $z = k(x, y, z) = k\delta(x, y, z) > 0$ .

(16) חשבו את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה)  
 $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$   
 בטאו את התשובה באמצעות המסה של התיבה,  $M$ .

**תשובות סופיות**

1 (1)

$$\frac{1}{3}(e^3 - 1) \quad (2)$$

$$\frac{27}{4} \quad (3)$$

$$\frac{65}{28} \quad (4)$$

$$2\sin 4 \quad (5)$$

$$3e - 6 \quad (6)$$

$$4 \quad (7)$$

$$\frac{\sin^2 4}{2} \quad (8)$$

$$\frac{5}{6} \quad (9)$$

$$\frac{88}{100} \quad (10)$$

$$\frac{17}{6} \quad (11)$$

$$16\frac{1}{5} \quad (12)$$

$$\frac{8}{3} \quad (13)$$

$$36 \quad (14)$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{2h}{3}\right), \quad M = \frac{1}{2}\pi kh^2r^2 \quad (15)$$

$$\frac{1}{3}M(a^2 + b^2) \quad (16)$$

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 24 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות.....  
**195**.....

## אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וצדירות

### שאלות

**בשאלה 1-4** חשבו את האינטגרלים המשולשים :

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 21xy^2 dz dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dy dx \quad (4)$$

5) גוף כלוא בגליל  $x^2 + y^2 = 9$ , בין המישור  $xy$  מלמטה, לבין מחציית פנוי הצדור  $\sqrt{25-x^2-y^2} = z$  מלמעלה. חשבו את נפח הגוף ואת המרכז שלו.

6) חשבו את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פנוי הצדור  $\sqrt{x^2+y^2} = z$  מלמטה,  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ .

7) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי פנוי הצדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  וממטה על ידי החרוט  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , על ידי מעבר לקואורדינטות גליליות.

8) מצאו את הנפח של התרחום מעל המישור  $xy$ , החסום על ידי הפוליאיד  $x^2 + y^2 = a^2$  והגליל  $z = x^2 + y^2$ .

9) חשבו את הנפח הכלוא בין  $z = x^2 + y^2$  ובין  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**10)** חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

פתרו בשלוש דרכים:

- על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
- על ידי שימוש בנוסחת נפח חרוט.

**11)** חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

פתרו בשתי דרכים:

- על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

**12)** חשבו את הנפח המוגבל בין כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו 1

לבין כדור שמרכזו בנקודה  $(0,0,1)$  ורדיוסו 1.

- על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

**13)** הציגו את נפח הגוף החסום בתחום הכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  ומחוץ לגליל

$x^2 + y^2 = 1$ , בשלוש דרכים:

- על ידי שימוש בקואורדינטות קרטזיות.
- על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

**14)** חשבו את נפח הגוף בתומן הראשון המוגבל בין כדור שרדיוסו 1 לבין כדור

שרדיוסו 2, בשלוש דרכים:

- על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
- על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- על ידי שימוש בנוסחה ידועה לחישוב נפח כדור.

**15)** ללא חישוב אינטגרלים חשב את האינטגרלים הבאים:

$$V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=r}^{2-r} r dz dr d\theta \quad \text{א.}$$

$$V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\frac{2}{\cos\phi+\sin\phi}} r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta \quad \text{ב.}$$

16) ללא חישוב אינטגרלים חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{0.5} \int_{z=r}^{0.5+\sqrt{0.25-r^2}} r dz dr d\theta .$$

$$V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\cos\phi} r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta .$$

**תשובות סופיות**

4 (1)

$\frac{\pi}{3}$  (2)

$\frac{24\pi - 32}{9}$  (3)

$\frac{32\pi}{5}$  (4)

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1107 / 488), V = \frac{122}{3}\pi$  (5)

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1.5 / (2 - \sqrt{2})), V = \frac{64}{3}\pi(2 - \sqrt{2})$  (6)

$\frac{64\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$  (7)

$\frac{\pi}{2}a^4$  (8)

$\frac{5}{6}\pi$  (9)

$\frac{8\pi}{3}$  (10)

$\frac{5}{3}\pi$  (11)

$\frac{5}{12}\pi$  (12)

$$V = \int_{x=-2}^2 \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1 dz dy dx - \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1 dz dy dx . \text{א}$$
 (13)

$$V = \int_{\phi=\pi/6}^{5\pi/6} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1/\sin\phi}^2 r^2 \sin\phi dr d\theta d\phi . \text{ב}$$

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1}^2 \int_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} 1 rdz dr d\theta . \text{ב}$$

$\frac{7}{6}\pi$  (14)

$\frac{2\pi}{3}$  (15)

$\frac{\pi}{8}$  (16)

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 25 - החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים ..... 199

## החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

---

### שאלות

**1)** חשבו את  $V$ , כאשר  $G$  הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים  
 $\int \int \int_G (z-y)^2 xy dV$   
 $. xy=4, xy=2, z=y+1, z=y, x=3, x=1$

**2)** חשבו את הנפח של האליפסואיד  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

**3)** חשבו את  $V$ , כאשר  $G$  הוא האליפסואיד  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

**4)** חשבו את נפח התחום המוגבל על ידי המשטחים :  
 $. y=4z^2, y=z^2, y=4x-12, y=4x, y=2z, y=z$

**5)** חשבו את  $V$ , כאשר  $G$  הוא כדור  $\int \int \int_G \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2} dV$   
 שמרכזו בנקודה  $(1,2,4)$  ורדיוסו 1.

### תשובות סופיות

$$2\ln 3 \quad (1)$$

$$\frac{4}{3}\pi abc \quad (2)$$

$$\frac{4}{15}\pi a^3 bc \quad (3)$$

$$\frac{105}{32} \quad (4)$$

$$\pi \quad (5)$$

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

### פרק 26 - אינטגרלים משטחיים ו שימושיהם

#### תוכן העניינים

200 .....	1. אינטגרלים משטחיים מסוג 1 .....
(ללא ספר) .....	2. הצגה פרמטרית של משטח .....
202 .....	3. אינטגרלים משטחיים מסוג 2 .....

## אינטגרלים משטחיים מסוג I

### שאלות

**בשאלות 1-5** חשבו את האינטגרל המשטחי :

$$(1) \quad z = 1 + 2x + 3y, \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } y = z, \text{ מעל המלבן } R = [0, 3] \times [0, 2].$$

$$(2) \quad .0 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 2, y = x^2 + 4z, \text{ כאשר } S \text{ הוא המשטח}$$

$$(3) \quad .x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = y + 3, \text{ שכלוא בתחום הגליל}$$

$$(4) \quad .z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 4, \text{ כאשר } S \text{ הוא חצי הכדור}$$

$$(5) \quad , \mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 3u \mathbf{k}, \text{ כאשר } S \text{ הוא חלק החרוט}$$

$$\text{המקיימים } 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

(6) חשבו את **שטח הפנים** של כדור בעל רדיוס  $R$ .

(7) היריעה הדקה  $S$  היא חלק הפרבולoid  $z = x^2 + y^2$ , שמתוחת למישור  $z = 1$  וצפיפותה  $\delta_0(x, y, z) = \delta_0$ , קבועה.

חשבו את  **משטח היריעה**.

**תשובות סופיות**

(1)  $171\sqrt{14}$

(2)  $\frac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{6}$

(3)  $\pi\sqrt{2}/4$

(4)  $16\pi$

(5)  $93/\sqrt{10}$

(6)  $4\pi R^2$

(7)  $\frac{\pi\delta_0}{6}(5\sqrt{5}-1)$

## אינטגרל משטחי מסוג II

### שאלות

בשאלות הבאות חשבו את האינטגרל  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$  ( $\mathbf{n}$  הוא נורמל חיצוני של  $S$ ).

בניסוח אחר: חשבו את השטף של שדה הזרימה  $\mathbf{F}$  דרך  $S$ .

$$\text{:(1)} \quad S \text{ הוא פני הקובייה הנקבעת על ידי המישורים: } \mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k} \\ . x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$$

$$\text{:(2)} \quad S \text{ הוא פני הגדוד } x^2 + y^2 + z^2 = 1; \mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$$

$$\text{:(3)} \quad S \text{ הוא פני הפירמידה הנקבעת על ידי המישורים: } \mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k} \\ . 2x + 2y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$$

$$\text{:(4)} \quad S \text{ חלק הפרaboloid } z = 4 - x^2 - y^2, \text{ שבו } z \geq 0, \mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\text{:(5)} \quad S \text{ הוא חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוס } 4, \mathbf{F} = 0\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + (-3y - 1)\mathbf{k} \\ \text{ והוא נמצא מעל המישור } xy.$$

### תשובות סופיות

$$\frac{11}{6} \quad \text{(1)}$$

$$\frac{8\pi}{3} \quad \text{(2)}$$

$$27 \quad \text{(3)}$$

$$12\pi \quad \text{(4)}$$

$$-16\pi \quad \text{(5)}$$

## חדוֹא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 27 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

### תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדוֹא.....	203
2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים .....	209
3. האינטגרל המסוים לפי ההגדלה, אינטגרביליות .....	212
4. משפטי האינטגרביליות.....	215
5. אינטגרביליות לפי דארבו.....	216
6. אינטגרביליות לפי דארבו - תרגול נוסף באנגלית.....	218

## הaintgral המסויים, הנוסחה היסודית של החדו"א

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-9:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 xe^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 10x dx \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4 + |x-1|} dx \quad (8)$$

$$\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx \quad (9)$$

**10)** הוכיחו כי :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx . \quad \text{א.}$$

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx . \quad \text{ב.}$$

**11)** הוכיחו שלכל פונקציה רציפה  $f$  :

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx . \quad \text{א.}$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx . \quad \text{ב.}$$

**12)** תהיו  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת על ידי  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

**13)** ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של  $\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx . \quad \text{14) חשבו :}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx . \quad \text{15) חשבו :}$$

**16)** נתונה פונקציה רציפה  $f$ . הוכיחו :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx . \quad \text{א. אם } f \text{ זוגית, אז}$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0 . \quad \text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית, אז}$$

чисבו את האינטגרלים בשאלות 17-18 :

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (17)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (18)$$

19) נתון כי  $f(x)$  פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל  $x$ , ונתון כי  $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

$$\cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right) dx \quad \text{чисבו את האינטגרל}$$

20) חשבו את ערך האינטגרלים הבאים :

$$\text{א. } \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$$

$$\text{ב. } \int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$$

$$\text{ג. } (n \in \mathbb{N}) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^n x} dx$$

21) (ازהרה לגבי שיטת הצבה)

א. חשבו את האינטגרל  $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ , בעזרת הצבה  $t = \frac{1}{x}$

ב. חשבו את האינטגרל  $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  יישירות.

ג. בסעיפים א' וב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

$$\cdot \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx \quad (22)$$

23) ענו על הסעיפים הבאים :

א. בעזרת הצבה  $x = \tan t$  חשבו את האינטגרל  $\int \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$

ב. חשבו את ערך האינטגרל  $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$

**24)** חשבו את ערך האינטגרל  $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos^2 x} dx$

**25)** תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה פעמיים בקטע  $[a,b]$ .

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x=a$  יוצר זווית  $\frac{\pi}{3}$  עם הçıוון

החיובי של ציר  $x$  והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x=b$  יוצר זווית  $\frac{\pi}{4}$

עם הçıוון החיובי של ציר  $x$ .

$$\text{חשבו את ערך האינטגרל } \int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x} dx$$

**26)** הוכחו:

אם  $f$  פונקציה רציפה ומוחזרת על כל הישר ואם  $T$  המחזור של  $f$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

**27)** הוכחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם  $f$  ו-  $g$  פונקציות רציפות ב-  $[a,b]$ , ואם  $\int_a^b f(t) dt = 0$  וגם

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = 0 \text{ אז } \int_a^b g(t) dt = 0$$

ב. אם  $f$  זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

$$\text{אז הפונקציה } g(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ אי-זוגית.}$$

### תשובות סופיות

$$-6 \quad \text{(1)}$$

$$\ln\left(\frac{15}{8}\right) \quad \text{(2)}$$

$$-2e^{-1} + 1 \quad \text{(3)}$$

$$\frac{1}{5} \quad \text{(4)}$$

$$\arctan 6 - \arctan 3 \quad \text{(5)}$$

$$\frac{\pi}{2} \quad \text{(6)}$$

$$\frac{17}{12} \quad \text{(7)}$$

$$\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5}) \quad \text{(8)}$$

$$\frac{17}{6} \quad \text{(9)}$$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

$$x = e^2 \quad \text{(12)}$$

$$0 \quad \text{(13)}$$

$$\frac{\pi}{4} \quad \text{(14)}$$

$$\frac{\pi^2}{4} \quad \text{(15)}$$

(16) שאלת הוכחה.

$$0 \quad \text{(17)}$$

$$2\arctan 4 \quad \text{(18)}$$

$$0 \quad \text{(19)}$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ א, ב, ג.} \quad \text{(20)}$$

$$\text{ג. ראו בסרטון.} \quad \text{ב. } \frac{\pi}{2} \quad \text{א. 0} \quad \text{(21)}$$

(22) שאלת הוכחה.

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ ב.} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c \text{ א.} \quad \text{(23)}$$

$$\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \quad \text{(24)}$$

$$1 - \sqrt{3} \quad \text{(25)}$$

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

## מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

### שאלות

1) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית, ונניח כי  $M \leq f(x) \leq m$  לכל  $x$  בקטע  $[a,b]$ .

$$\text{הוכיחו כי } m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות 2-10:

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (2)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (3)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (6)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (7)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (10)$$

**(11)** תהי  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית. בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם  $|f|$  אינטגרבילית בקטע,

$$\text{הוכיחו כי } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**(12)** תהי  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה המקיימת  $|f(x)| \leq \int_0^x f(t) dt$  לכל  $x \in [0,1]$ . הוכיחו כי  $f(0) = 0$ .

**(13)** תהי  $f : [0,a] \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש-  $f''(x) > 0$  לכל  $x \in [0,a]$ . הוכיחו כי  $\int_0^a f(x) dx > af\left(\frac{a}{2}\right)$ . תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

**(14)** תהי  $g$  פונקציה רציפה ב-  $[a,b]$ , המקיימת  $\int_a^b |g(t)| dt = 0$ . הוכיחו כי לכל  $x$  בקטע  $(a,b)$ , מתקיים  $g(x) = 0$ .

**(15)** תהי  $f$  פונקציה אינטגרבילית בקטע  $[a,b]$ , המקיימת  $\int_a^b f(x) dx > 1$ . הוכיחו שקיים  $x_0 \in [a,b]$ , עבورو  $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$ .

**(16)** יהי  $n$  מספר טבעי, ותהי  $f$  פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע  $[1,n]$ . הוכיחו כי  $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + f(3) + \dots + f(n)$ .

**(17)** חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$

**(18)** הוכיחו שאם הפונקציה  $f$  רציפה בקטע  $[a,b]$ , גזירה בקטע  $(a,b)$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \frac{M(b-a)^2}{2} \text{ אז } f(a)=0 \text{ וכן } f'(x) \leq M \text{ וגם}$$

**(19)** יהיו  $f, g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי  $f$  עולה ו-  $g$  אי-שלילית.

הוכיחו שקיים  $c \in [a,b]$  כך שה-

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## הaintegral המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-7 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] \quad (7)$$

$$\text{חסבו : } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right) \quad (8)$$

\* תרגיל זה רלוונטי רק למי שמלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

חשבו את האינטגרלים בשאלות 9-12 על פי ההגדרה (של רימן) :

$$\boxed{1+2+3+\dots+n = 0.5n(n+1)}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

תוכלו להיעזר בזיהויות הבאות :

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (12)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (11)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (9)$$

13) חשבו לפי ההגדרה של רימן את  $\int_1^4 x^2 dx$

14) חשבו לפי ההגדרה של רימן את  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

רמז : השתמשו בחלוקת הבאה של הקטע  
 $P = \left\{ 1 = 2^{\frac{0}{n}}, 2^{\frac{1}{n}}, 2^{\frac{2}{n}}, 2^{\frac{3}{n}}, \dots, 2^{\frac{n}{n}} = 2 \right\}$

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{5} \quad \text{(1)}$$

$$1 - \cos 1 \quad \text{(2)}$$

$$\ln 2 \quad \text{(3)}$$

$$\frac{\pi}{4} \quad \text{(4)}$$

$$\ln(1 + \sqrt{2}) \quad \text{(5)}$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad \text{(6)}$$

$$\ln 2 \quad \text{(7)}$$

$$-1 \quad \text{(8)}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{(9)}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{(10)}$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{(11)}$$

$$2 \quad \text{(12)}$$

$$21 \quad \text{(13)}$$

$$0.5 \quad \text{(14)}$$

## משפט האינטגרביליות

### שאלות

**1)** בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע  $[a,b]$  :

$$[a,b] = [0,2] \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} . \quad \text{א.}$$

$$[a,b] = [-4,14] \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} . \quad \text{ב.}$$

$$[a,b] = [0,9] \quad f(x) = \begin{cases} 4x & x \neq 1 \\ -41 & x = 1 \end{cases} . \quad \text{ג.}$$

**2)** ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע  $[a,b]$  .
- ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסויים שאינה אינטגרבילית בו.
- ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטען בקטע  $[-1,1]$  , שאינה אינטגרבילית בקטע.

**3)** לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכון או לא נכון. נמקו.

- א. קיימת פונקציה אינטגרבילית  $f$  , בקטע  $[a,b]$  , שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.
- ב. קיימת פונקציה  $f$  , החסומה בקטע  $[a,b]$  וגזירה בקטע  $(a,b)$  , שאינה אינטגרבילית ב-  $[a,b]$  .

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{4} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 2 & x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{4) נתונה הפונקציה}$$

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע  $[0,1]$  ?

لتשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## אינטגרביליות לפי דארבו

### שאלות

**1)** נתונה  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , המוגדרת על ידי  $x = f(x)$ .

- א. מצאו את האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו  
ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

**2)** נתונה  $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ , המוגדרת על ידי  $x^2 = f(x)$ .

- א. מצאו את האינטגרל העליון והתחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו בקטע  
ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

$$3) \text{ נתונה הפונקציה הבאה} \\ f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 0.5 \\ 2 & x = 0.5 \\ 1 & 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו.

**4)** נתונה הפונקציה  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  בקטע,  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ .

- א. בדקו, לפי ההגדרה של דארבו, האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע.
- ב. תנו דוגמה לפונקציה  $f$ , כך ש-  $|f|$  ו-  $f^2$  אינטגרביליות,  
אך  $f$  לא אינטגרבילית.

**5)** תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.

נניח שקייםת חלוקה  $P$  של הקטע  $[a,b]$ , כך ש-  $L(P,f) = U(P,f)$ .

הוכיחו ש-  $f$  פונקציה קבועה.

**6)** תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.

נניח שקייםת חלוקה  $P_n$  של הקטע  $[a,b]$ , כך ש-  $U(P_n,f) - L(P_n,f) \rightarrow 0$ .

א. הוכיחו ש-  $f$  אינטגרבילית בקטע.

$$\text{ב. הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} U(P_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, f) = \int_a^b f(x) dx$$

7) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית בעזרת קритריון רימן. בנוסף, חשבו את האינטגרל המסוים של הפונקציה בקטע.

א.  $f(x) = x$ , בקטע  $[0,1]$ .

ב.  $f(x) = x^2$ , בקטע  $[0,2]$ .

8) הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x}$  אינטגרבילית בקטע  $[1,2]$  בעזרת קритריון רימן.

### תשובות סופיות

$$\int_0^1 f dx = \frac{1}{2} . \quad \text{ב.} \quad \overline{\int_0^1} f = \underline{\int_0^1} f = \frac{1}{2} . \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\int_0^2 f dx = \frac{8}{3} . \quad \text{ב.} \quad \overline{\int_0^2} f = \underline{\int_0^2} f = \frac{8}{3} . \quad \text{א.} \quad (2)$$

3) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} . \quad \text{ב.} \quad (4)$$

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

## אינטגרביליות לפי דארבו – תרגול נוספת באנגלית

### שאלות

**1)** תהי  $\mathbb{R} \rightarrow [0,2]$ :  $f$  מוגדרת על ידי  $x^2 = f(x)$ .  
מצאו סכום דארבו עליון ותחתון של הפונקציה המתאימים לחוקת הקטע  $-n$  תת-קטועים בעלי אורך שווה, כאשר  $n = 6, 8, 10, 20$ .

**2)** ענו על הסעיפים הבאים :

- הגידרו את המושג עידון של חלוקה.
- הוכחו את המשפט הבא :  
תהי  $\mathbb{R} \rightarrow [a,b]$ :  $f$  פונקציה חסומה ויהיו  $P$  ו-  $Q$  שתי חלוקות של הקטע, כך ש-  $Q$  עידון של  $P$ , אז  $L(Q,f) \leq U(Q,P) \leq U(Q,f)$ .
- הוכחו את המסקנה הבאה מהמשפט :

$$\cdot \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x)dx, \text{ או } f \text{ פונקציה חסומה, אז}$$

**3)** ענו על הסעיפים הבאים :

- הוכחו את קרייטריון רימן לאינטגרביליות.  
כלומר, הוכחו את המשפט הבא :  
פונקציה חסומה  $f$  היא אינטגרבילית בקטע  $[a,b]$  אם ורק אם לכל  $0 < \varepsilon < U(P,f) - L(P,f)$  קיימת חלוקה  $P$  של הקטע  $[a,b]$ , כך ש-  $\sum_{i=1}^{n-1} U(P_i, f) - L(P_i, f) < \varepsilon$ .
- הוכחו את המסקנה מהמשפט לעיל :  
תהי  $f$  פונקציה חסומה בקטע  $[a,b]$ , ונניח כי  $(P_n)$  היא סדרה של חלוקות של הקטע  $[a,b]$ , כך ש-  $\lim_{n \rightarrow \infty} U(P_n, f) - L(P_n, f) = 0$ .  
הוכחו שגם  $f$  אינטגרבילית.

$$\cdot f(x) = \begin{cases} x & x = 1/n \\ 0 & x \neq 1/n \end{cases} \text{ מוגדרת על ידי}$$

הוכחו כי  $f$  אינטגרבילית ומצאו את  $\int_0^1 f(x)dx$ .

**4)** הוכחו את המשפטים הבאים :

- פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.
- פונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.

5) סדרת פונקציות  $f_n(x) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת על ידי:  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{1+x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

$$\text{הוכחו כי } 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$$

6) תהי פונקציה  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , כך ש-  $x$  רציונלי,  $f(x) = 0$  לכל  $x$  אי-רציונלי.

העריכו את האינטגרל העליון והתחתון של  $f$ , והראו כי  $f$  אינה אינטגרבילית.

7) תהי  $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ , מוגדרת באופן הבא:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{כאשר } x = \frac{p}{q}, \text{ כאשר } p, q \in \mathbb{N}, \text{ ול- } p, q \text{ אינ גורמים משותפים} \\ 0 & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי או } x = 1 \end{cases}$$

א. תהי  $A_N$  מוגדרת באופן הבא, לכל  $N \in \mathbb{N}$ :  $A_N = \left\{ x \in (0,1) \mid x = \frac{p}{q} \text{ ו- } q \leq N, p, q \in \mathbb{N}, \text{ ול- } p, q \text{ אינ גורמים משותפים}. \right\}$   
הראו שהקבוצה  $A_N$  סופית.

ב. ל-  $N \in \mathbb{N}$  ו-  $\epsilon > 0$  נתונים, הראו כי קיימים קטעים

$$[x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2m-1}, x_{2m}]$$

$$, 0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_{2m-1} < x_{2m} < 1$$

$$, A_N \subseteq (x_1, x_2) \cup (x_3, x_4) \cup \dots \cup (x_{2m-1}, x_{2m})$$

$$.\left| x_1 - x_2 \right| + \left| x_3 - x_4 \right| + \dots + \left| x_{2m-1} - x_{2m} \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

ג. הראו ש-  $f$  אינטגרבילית.

ד. מצאו שתי פונקציות אינטגרביליות,  $g$  ו-  $h$  ב-  $[0,1]$ , כך שההרכבה  $h \circ g$  אינה אינטגרבילית.

8) תהי  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית וכן  $[c,d] \subseteq [a,b]$ .

הראו ש-  $f$  אינטגרבילית ב-  $[c,d]$ .

**9)** ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $f$  חסומה ב- $[c,d]$ , ונתנו :

$$M = \sup\{f(x) | x \in [c,d]\}, M' = \sup\{|f(x)| | x \in [c,d]\}$$

$$m = \inf\{f(x) | x \in [c,d]\}, m' = \inf\{|f(x)| | x \in [c,d]\}$$

הוכחו כי  $m - m' \leq M - M'$ .

ב. תהי  $\mathbb{R} \rightarrow [a,b] : f$  אינטגרבילית.

הוכחו כי  $|f|^2$  אינטגרבילית.

**10)** תהיינה  $f$  ו-  $g$  שתי פונקציות אינטגרביליות ב- $[a,b]$ .

א. הוכחו כי אם  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$  לכל  $x \in [a,b]$  אז  $f(x) \leq g(x)$  לכל

ב. הוכחו כי  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

ג. הוכחו כי אם  $m \leq f(x) \leq M$  לכל  $x \in [a,b]$  אז  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{6}$$

**11)** תהי  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  (כלומר,  $f(x) \geq 0$ ).

א. הוכחו כי אם  $f$  רציפה וכן  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , אז  $f$  לכל

ב. הביאו דוגמה לפונקציה  $f$  אינטגרבילית ב- $[a,b]$ , כאשר  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , כאשר  $f(x_0) > 0$ , עבורו  $x_0 \in [a,b]$ .

אבל קיים  $x_0 \in [a,b]$ , עבורו  $0 < f(x_0) < \epsilon$ .

הערה :  $f$  לא תהיה רציפה.

**12)** תהי  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.

נניח שלכל  $c \in (0,1)$ , הפונקציה  $f$  אינטגרבילית ב- $[c,1]$ .

א. הוכחו כי  $f$  אינטגרבילית ב- $[0,1]$ .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \sin \frac{1}{x} & x \in (0,1] \end{cases}$$

אינטגרבילית ב- $[0,1]$ .

**13)** תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.  
 נניח שכאשר המכפלה  $fg$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ , עבור פונקציה אינטגרבילית  
 כלשהי  $g$ , מתקיים  $\int_a^b (fg)(x) dx = 0$ .  
 הוכיחו כי  $0$  (כלומר,  $f(x) = 0$  לכל  $x \in [a, b]$ )

**14)** ענו על הסעיפים הבאים:  
 א. יהיו  $x, y \geq 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + y^n)^{\frac{1}{n}} = \max \{x, y\}$$

ב. תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  רציפה.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b (f(x))^n dx \right) = \sup \{f(x) | x \in [a, b]\}$$

**15) [אי-שוויון קושי-שווורץ]**

א. יהיו  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

רמז:  $t \in \mathbb{R}$  לכל  $\sum_{i=1}^n (tx_i + y_i)^2 \geq 0$

ב. תהיינה  $f, g$  שתי פונקציות אינטגרביליות ב- $[a, b]$ .

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left( \int_a^b (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b (g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

רמז:  $t \in \mathbb{R}$  לכל  $\int_a^b [tf(x) + g(x)]^2 dx \geq 0$

**16)** תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית.

נשנה את הערכים של  $f$  במספר סופי של נקודות.  
 הוכיחו שהפונקציה שמתකבלת אינטגרבילית.

**17) סעיף א'**

$$1. \text{ הוכיחו כי } b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a + \dots + b^{n-2} + a^{n-1})$$

כאשר  $a, b \in \mathbb{R}$  ו  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

$$2. \text{ הוכיחו כי } k, n \in \mathbb{Z}^+, k^n < \frac{(k+1)^{n+1} - k^{n+1}}{n+1} < (k+1)^n.$$

$$3. \text{ הוכיחו כי } \sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^m k^n$$

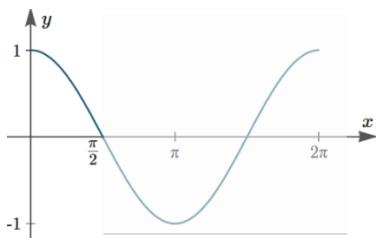
$$\text{כלומר, } 1^n + 2^n + \dots + (m-1)^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < 1^n + 2^n + \dots + (m-1)^n + m^n,$$

**סעיף ב'**

תהי  $f(x) = x^n$  מוגדרת בתחום  $[0, 1]$ , כאשר  $n \in \mathbb{N}$ .

בעזרת סכומי רימן, הוכיחו כי  $f$  אינטגרבילית ב-  $[0, 1]$ , וחשבו  $\int_0^1 f(x) dx$ .

רמז: חלקו את הקטע  $[0, 1]$  ל-  $m$  קטעים שווים והיעזרו בסעיף א' להערכת הסכומים העליונים והתחתונים.



$$18) \text{ תהי } f(x) = \cos x \text{ מוגדרת ב- } \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ כאשר } n \in \mathbb{N}.$$

השתמשו בסכומי רימן והוכיחו ש-  $f$  אינטגרבילית

$$\cdot \int_0^{\pi/2} f(x) dx, \text{ וחשבו את } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{רמז 1: חלקו את } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ ל- } n \text{ קטעים שווים, והניחו כי } n \rightarrow \infty.$$

רמז 2: השתמשו בזהות הטריגונומטרית הבאה, כאשר  $\theta \in \mathbb{R}$  ו-  $k \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\sin \frac{\theta}{2} \cos k\theta = \frac{1}{2} \left[ \sin \frac{(2k+1)\theta}{2} - \sin \frac{(2k-1)\theta}{2} \right]$$

$$\cdot \sin \frac{\theta}{2} \sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{1}{2} \left[ \sin \frac{(2n+1)\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

$$19) \text{ חשבו את } \int_1^2 f(x) dx, \text{ בעזרת חלוקה}$$

כאשר  $x_i = 2^{\frac{i}{n}}$  ( $0 \leq i \leq n$ ), ווגם:

$$P_4 = \left\{ 1, 2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{2}{4}}, 2^{\frac{3}{4}}, 2 \right\} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{א.}$$

20) תהינה  $f, g$  שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע  $[a, b]$ . הוכיחו:

- א. אם  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$  לכל  $x \in [a, b]$ , אז  $f(x) \leq g(x)$
- ב. אם  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$  לכל  $x \in [a, b]$ , אז  $m \leq f(x) \leq M$

21) נניח כי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית אי-שלילית.

הוכיחו כי  $\sqrt{f}$  אף היא אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

22) נתונה הפונקציה  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . הוכיחו או הפריכו:

- א. אם  $f$  אינטגרבילית, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס,

$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

- ב. אם  $f$  רציפה, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז  $0 < \int_a^b f(x) dx > 0$

ג. אם  $f$  אינטגרבילית, אז כך גם  $f^2$ .

ד. אם  $|f|$  אינטגרבילית, אז כך גם  $f$ .

23) חשבו את  $\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ , כאשר  $\int_{0.25}^{4.3} \lfloor x \rfloor dx$

(פונקציית הערך השלים).

24) הוכיחו כי אם  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$  ו- $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

רמז: הניחו תחילת כי  $\alpha \geq 0$ , והיעזר בפונקציה  $-f$ , ל- $\alpha < 0$ .

25) הוכיחו כי אם  $f, g$  אינטגרביליות ב- $[a, b]$ , אז כך גם  $f + g$

$$\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

רמז: הוכיחו כי  $\overline{\underline{(f+g)}} \leq \overline{\underline{f}} + \overline{\underline{g}}$

26) נניח כי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית וכן קיימים  $c > 0, d < c$  כך ש-

לכל  $x \in [a, b]$   $\frac{1}{f(x)}$  אינטגרבילית ואניינה אפס ; חסומה

הוכיחו כי גם  $\frac{1}{f(x)}$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ .

27) נתיח כי  $f, g$  אינטגרביליות ב- $[a,b]$ .

א. הוכיחו כי גם  $f \cdot g$  אינטגרבילית ב- $[a,b]$ .

ב. הוכיחו כי אם  $\int_a^b |g(x)| dx > c > 0$  אז גם  $\frac{f}{g}$  אינטגרבילית ב- $[a,b]$ .

28) הנתיח כי  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  וכן  $a < c < b$ , והוכיח כי :

א. אם  $f$  אינטגרבילית ב- $[a,b]$ , אז היא אינטגרבילית גם ב- $[a,c]$  ו- $[c,b]$ .

ב. אם  $f$  אינטגרבילית ב- $[a,c]$  ו- $[c,b]$ , אז היא אינטגרבילית גם ב- $[a,b]$ .

ג. באיזה מהמקרים, בעקבות א' ו-ב', מתקיימים השווים :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

29) נתיח כי  $f, g$  אינטגרביליות ב- $[a,b]$ .

נגידיר  $\psi = \min\{f, g\}$  וכן  $\varphi = \max\{f, g\}$

הוכיחו כי גם  $\psi, \varphi$  אינטגרביליות ב- $[a,b]$ .

$$\text{רמז : } ? = \min\{a, b\}, \max\{a, b\} = \frac{1}{2}[a+b+|a-b|]$$

30) תהי  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.

בהתנחת החלוקה  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  של  $[a,b]$  וכן  $\varepsilon > 0$

נגידיר שתי תת-קבוצות,  $A_\varepsilon(P)$  ו- $B_\varepsilon(P)$ , באופן הבא :

$$\text{אם } i \in A_\varepsilon(P) \text{ אז } M_i - m_i \geq \varepsilon \quad \text{אם } i \in B_\varepsilon(P) \text{ אז } M_i - m_i < \varepsilon$$

$$\text{כמו כן, נגידיר } s_\varepsilon(P) = \sum_{i \in B_\varepsilon(P)} \Delta x_i$$

הוכיחו כי פונקציה חסומה  $f$  אינטגרבילית ב- $[a,b]$  אם ורק אם לכל  $\varepsilon > 0$  ולכל  $\delta > 0$  קיים  $\zeta < \delta$  כך שכל  $P$  כניל ז'  $s_\varepsilon(P) < \zeta$ .

31) נתיח כי  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה ותהי  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  חלוקה של  $[a,b]$ .

א. האם תמיד ניתן לבחור תגיות  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  ל- $P$ ?

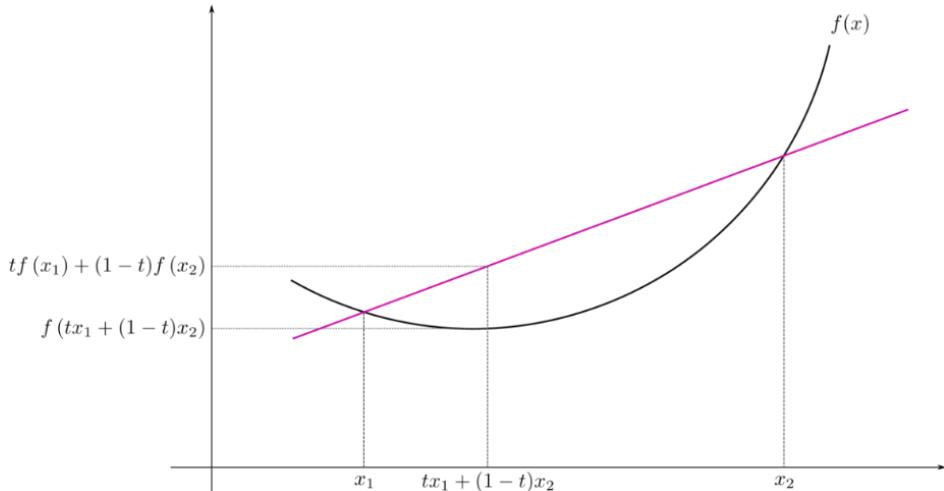
$$\text{כך ש- } S(f; P, C) = L(f, P) ? \text{ נוכיח.}$$

הערה : ב"תגיות" הכוונה ש-  $x_{i-1} < c_i < x_i$

ב. האם התשובה תשתנה אם יניתן גם כי  $f$  רציפה?

32) זכרו כי פונקציה  $f$  על קטע  $I$  תיקרא קמורה, אם לכל  $a, b \in I$ , ולכל  $t \in [0,1]$ ,

$$\text{מתקיים } f(t \cdot a + (1-t) \cdot b) \leq t \cdot f(a) + (1-t) \cdot f(b)$$



א. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  קמורה.

הוכיחו כי לכל  $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$  המקיימים  $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ , מתקיים אי-השוויון

$$\text{[רמז: אינדוקציה על } n\text{]} \quad \cdot f\left(\sum_{i=1}^n t_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(a_i)$$

ב. (אי-שוויון ינגש)

תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  קמורה ורציפה, ותהי  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה.

$$\text{הוכיחו כי } f\left(\int_0^1 g(x) dx\right) \leq \int_0^1 f(g(x)) dx$$

33) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ותהי  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

א. הוכיחו כי  $f$  אי-זוגית אם ורק אם  $F$  זוגית.

ב. הוכיחו כי  $f$  זוגית אם ורק אם  $F$  אי-זוגית.

34) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ותהי  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

א. הוכיחו כי אם  $F$  מחזורית, אז גם  $f$  מחזורית.

ב. מצאו דוגמה שבה  $f$  מחזורית אבל  $F$  לא-מחזורית.

35) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית.

$$\text{הוכיחו שקיימים } c \in [a,b], \text{ כך ש-} \int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$$

36) תהי  $A$  קבוצת כל הפונקציות  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :  $f$ , שהן אינטגרביליות בכל  $[a, b]$ ,

$$\cdot \boxed{\int_0^x f(t)dt = f(x) - 1 : x \in \mathbb{R}} \text{ ומקיימות את השוויון הבא לכל } x \in \mathbb{R}$$

א. מצאו דוגמה לפונקציה ב-  $A$ .

ב. הוכיחו כי אם  $f \in A$ , אז  $f$  גזירה ב-  $\mathbb{R}$ .

(רמז: תחילת הראו ש-  $f$  רציפה).

ג. מצאו את כל הפונקציות  $f$  ב-  $A$ .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)